Von Christoph Hammer

Durch Aufgaben gesteuerter Mathematikunterricht

Bereits in der 2002 veröffentlichten Broschüre[1] wurde ausführlich auf unterschiedliche Aspekte der Weiterentwicklung der Aufgabenkultur eingegangen. Welche Rolle die Bildungsstandards in diesem Zusammenhang spielen können, wurde in diesem Heft im vorangegangenen Kapitel erläutert und mit Beispielen aus der Biologie und der Chemie verdeutlicht. Die wesentlichen Gedanken sind auf andere Fächer, insbesondere auch auf die Mathematik übertragbar. In diesem Abschnitt sollen daher lediglich ergänzende Aspekte behandelt werden.

Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht

Aufgaben haben im Mathematikunterricht eine zentrale Bedeutung. Mehr als in anderen Schulfächern stehen sie im Mittelpunkt, wenn es darum geht, abstrakte Zusammenhänge zu veranschaulichen, Algorithmen einzuüben und letztlich den erreichten Lernstand zu überprüfen. Damit sind wichtige Rollen von Aufgaben angesprochen: Sie dienen der Veranschaulichung, dem reproduzierenden Üben und werden zu Prüfungszwecken eingesetzt.

Ein wesentlicher Aspekt, der sowohl den eingefleischten Mathematiker als auch den Einsteiger an Aufgaben reizen kann, kommt dabei zu kurz: Es fehlt die Herausforderung, Mathematik zu „treiben“ (P. Gallin). Damit ist eine entscheidende Komponente angesprochen, die dieses Fach reizvoll machen kann.

Durch geeignete Aufgaben können persönliche Auseinandersetzungen und selbständige Entdeckungen provoziert werden. Um diese Erfahrungen zu ermöglichen, kommt es darauf an, anregende Probleme in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen und vor der Besprechung der Theorie eine persönliche Auseinandersetzung zu veranlassen. Eine entsprechende didaktische Konzeption stellen Ruf/Gallin[2] mit dem „Dialogischen Lernen“ vor, das in dem Dreiklang **„Ich – Du – Wir“** kurz zusammengefasst ist.
In einem ersten Schritt setzen sich die Schüler individuell mit einer Aufgabenstellung („Auftrag“; s. u.) auseinander (Ich). Dann treten sie in den Dialog mit einem „Du“ (Lehrer, Mitschüler), das konstruktive Rückmeldungen gibt. Dabei geht es nicht um Fehlersuche, sondern um Verstärkung hilfreicher oder sogar origineller Ansätze. Schließlich wird das Regelhafte, die saubere mathematische Lösung für alle gemeinsam festgehalten (Wir).
Dieses „Ich – Du – Wir – Prinzip“ konnten sich schon viele Lehrkräfte zu eigen machen, auch wenn sie den methodischen Vorschlägen von Gallin/Ruf nicht folgen wollten. Schon die Tatsache überzeugt, dass Lernende, die sich schon mehr oder weniger erfolgreich mit einer fachlichen Fragestellung auseinandergesetzt haben, wesentlich stärkeres Interesse an der Lösung haben, als wenn es um bloße Reproduktion geht. Wer einmal begonnen hat, sich mit einem Problem zu beschäftigen, möchte auch wissen, „wie es geht“.
Die vier folgenden Beispiele zeigen differenzierende Problemstellungen, die allen Schülerinnen und Schülern einen Einstieg ermöglichen und anspruchsvolle Herausforderungen beinhalten. Während die ersten drei Aufgaben eher der Einführung und Erarbeitung neuer Themen dienen, bietet das vierte Beispiel Anregungen für Übungsphasen.

1_Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus: **Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts – Erfahrungsbericht zum BLK-Programm SINUS in Bayern**, München 2002
2_Gallin P., Ruf U.: **Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik**. 2 Bände, Kallmeyer; Seelze 1998

Beispiele

Einstiegsaufgabe mit interessantem Kontext

Im ersten Beispiel soll Anregungsmaterial vorgestellt werden, das sich dazu eignet, vor der Einführung des Steigungsbegriffs in der 8. bzw. 9. Jahrgangsstufe Schülerinnen und Schüler mit der Thematik zu konfrontieren.

Marsmensch auf Talfahrt

Wer an den X-Speed-Weltmeisterschaften in Verbier in der Schweiz teilnimmt, muss ein bisschen irre sein. Die Skier sind irre lang (2,50 Meter), die Piste ist irre steil (bis zu 90 Prozent Gefälle), dazu noch dieser irre Anzug. Die hautenge Latex-Pelle und der aerodynamisch geformte Helm sollen den Luftwiderstand minimieren. Die Speed-Ski-Fahrer werden irre schnell – der Italiener Simone Origone (*Foto: dpa*) hält den Weltrekord mit 251,21 Stundenkilometern, der Schweizer Philipp May erreichte vergangenes Jahr 250 Stundenkilome-
(...)

Die Zeitungsmeldung aus der SZ vom 21.4.2007 bietet durch den Vergleich zwischen der Photografie und der Angabe „bis zu 90 % Gefälle“ einen guten Anknüpfungspunkt. Mögliche Aufgabenstellungen ergeben sich von selbst. Physikalische Fragestellungen zu dieser Thematik sind bei **www.leifiphysik.de** (Jahrgangsstufe 11 (neunjähriges Gymnasium) unter „Musteraufgaben“) zu finden.
Die Einführung neuer Themen anhand konkreter Aufgabenbeispiele ist häufig empfehlenswert und lässt sich durch vorzeitige Bearbeitung interessanter Aufgaben (auch aus dem Lehrbuch) einfach realisieren.

Aufgabe zum Argumentieren und Kommunizieren[3]

Aus gleichartigen Würfeln wird eine Anordnung gelegt, die von der Seite wie Bild 1 und von vorne wie Bild 2 aussieht.

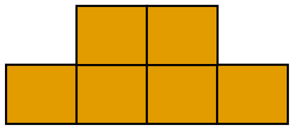


Bild 1

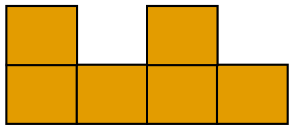
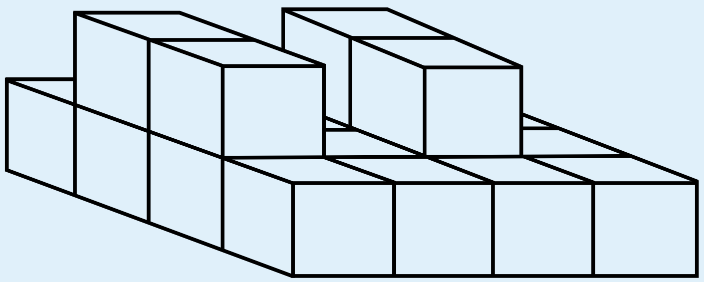


Bild 2

Wenn man 20 Würfel verwendet, ergibt sich nebenstehendes Schrägbild.



a) Kann man auch mit weniger Würfeln auskommen, um obige Ansichten zu erhalten?
b) Gibt es eine Mindestanzahl?

Diese Aufgabe hat die überraschende Lösung, dass lediglich 6 Würfel ausreichen. Entfernt man nach und nach unnötige Würfel, so muss jeder Schritt begründet werden. Schließlich liegt der Beweis der Vermutung, dass weniger als 6 Würfel nicht ausreichen, auf der Hand, wenn man beim Blick von oben erkennt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte des 4 x 4-Rasters der unteren Schicht genau

3_Nach de Lange, J., Utrecht: persönliche Mitteilung

ein Würfel liegt. Eine Animation dieses Vorgehens ist unter **www.sinus-bayern.de** zu finden.
Bei dieser Aufgabe sind selbständige Auseinandersetzung und Kommunikation mit Partnern wichtig. Sie hat einen motivierenden, handlungsorientierten Zugang und ist ein schönes Beispiel für eine anspruchsvolle Aufgabe zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Darüber hinaus regt sie zur kritischen Auseinandersetzung mit Darstellungen an, bei denen Informationen fehlen.

Differenzierender Auftrag

Um alle Schüler herauszufordern und zu aktivieren, sind differenzierende Aufträge günstig, die sinnvolle mathematische Beschäftigung auf jedem Niveau ermöglichen. Sie sind gut formuliert, wenn drei Aspekte enthalten sind:
Der **Einstieg** soll zum Problem hinführen und für niemanden eine unüberwindliche Hürde darstellen. Im Mittelpunkt muss selbstverständlich eine gehaltvolle mathematische Problemstellung zum aktuellen Lehrplanstoff – der **Kern der Sache** – stehen. Der dritte Aspekt eines differenzierenden Auftrags lädt die Lernenden zu einem geistigen Höhenflug ein, der manchmal nicht jedem gelingt. Diese „**Rampe**“ kann Verbindungen herstellen, Entdeckungen ermöglichen und neue Problemlösestrategien verlangen. Oft steckt in der Rampe auch eine Verallgemeinerung des im Kern der Aufgabe behandelten Spezialfalls.
Ausgangspunkt des folgenden Beispiels ist einfache Bruchrechnung, durch anspruchsvollere Wahl der gegebenen Ziffern kann der Schwierigkeitsgrad erhöht werden. Kern der Sache ist ein Abzählproblem:

Einstieg:
Es sind die Zahlen 1, 2 und 3 gegeben. Bilde alle möglichen Brüche aus jeweils zwei dieser Zahlen und sortiere sie der Größe nach. (Mehrfachverwendung erlaubt!)

Kern der Sache:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 verwendest? Wie viele dieser Brüche sind kleiner als 1?

Rampe:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n verwendest? Sind die Brüche alle verschieden? Forsche weiter!

Im Unterricht sollte zunächst sicher gestellt werden, dass alle Lernenden die Aufgabenstellung genau verstanden haben und wissen, um welche Objekte es geht. Hier heißt das, es sind Brüche mit einstelligem Zähler und einstelligem Nenner aus den gegebenen Zahlen zu bilden, wobei diese auch mehrfach verwendet werden dürfen.

Verwendet man zur Lösung eine tabellarische Darstellung, so wird schnell klar, dass die Anzahl der Möglichkeiten das Quadrat der Anzahl der verfügbaren Zahlen ist.

	1	2	3
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$

	1	2	3	5	7
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{7}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{7}$

Die Frage nach der Anzahl möglicher Brüche kleiner 1 kann dann direkt oder – gelöst von konkreten Zahlen – durch Veranschaulichung mit Plättchen leicht beantwortet werden:

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n\,(n - 1)}{2}$$

Dieses Ergebnis beinhaltet auch die Lösung des berühmten Problems des kleinen Gauß, bei dem die Summe der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n – 1 (in der hier verwendeten Zählweise) zu berechnen ist. Eine ausführliche Darstellung dieses sehr anschaulichen Beweises der Summenformel von Gauß und Lösungshinweise zur „Rampe“ sind unter **sinus-bayern.de** zu finden.

Produktives Üben auch mit Plantagenaufgaben

Zweifellos bleibt die häufig praktizierte Übung und Sicherung von Routinen eine wesentliche Rolle der Aufgabenbearbeitung im Unterricht und zu Hause. Hier soll gezeigt werden, wie durch geeignete Fragestellungen nachhaltige Erfolge durch Übungen erzielt werden können, die über „blindes“ Trainieren unverstandener Algorithmen hinaus gehen. Den häufigen Klagen vieler Lehrkräfte, ihre Schülerinnen und Schüler würden immer wieder unangemessene Lösungsmethoden verwenden, stehen zu selten Unterrichtsaktivitäten gegenüber, die die adäquate Wahl des Lösungswegs in den Mittelpunkt stellen. Dazu ein Beispiel: Es kommt durchaus vor, dass Lernende die Gleichung $3x^2 = 48$ mit der Formel oder mit quadratischer Ergänzung lösen. Bei Aufgaben, wie: $x(x + 2) = 0$ wird vielleicht nach dem Ausmultiplizieren ebenso verfahren. Dem kann entgegengewirkt werden, indem man bei Aufgabenserien[4] nicht nur den im Buch formulierten Auftrag gibt:

Berechne die Nullstellen:

a) $x^2 + 8 = 0$	b) $(2x + 2)x = 2$	c) $x^2 + x = 2x - 2$	d) $x^2 - 13x = 0$
e) $-x^2 + 3x = x^2$	f) $2 + x + x^2 = 2$	g) $x^2 + 6x + 5 = 0$	h) $x\,(x + 2) = 0$
i) $x^2 + 2 - 15x = 0$	j) $2x^2 - 5 = 2x + 5$	k) $x = x^2$	l) $x + 2 + x^2 + 2 = 0$
m) $x\,(x + 2) = 0$	n) $x\,(x + 2) = 2$	o) $2x^2 + 2\,(x - 2) + 3 = 0$	p) $2\,(x + 2)\,(x - 2) = 0$

Anregende Fragen könnten hier sein:
→ Bilde Gruppen und begründe deine Entscheidung.
→ Welche Aufgaben kannst du schon lösen, welche nicht? Warum?
→ Welche Aufgaben können durch kleine Umformungen vereinfacht werden?

Solche Fragen schulen den Blick auf die unterschiedlichen Problemstellungen und die bewusste Auswahl von Lösungsverfahren. Sie sind differenzierend, da sie auf unterschiedlichem Niveau bearbeitet werden können: manche Jugendliche müssen mehr oder weniger Aufgaben ausrechnen und manche werden bereits souverän Strukturen erkennen. Nebenbei sind solche Fragen unabhängig vom aktuellen Thema und können in beliebigen Zusammenhängen sinnvoll gestellt werden.

4_Nach Leuders, T.: **Reflektierendes Üben auch mit Plantagenaufgaben in MNU 59/5.** Verlag Klaus Seeberger; Neuss, 2006