Überprüfung von Grundwissen

Wie die Unterrichtspraxis gezeigt hat, gewinnt die Arbeit mit dem Grundwissen bei den Schülerinnen und Schülern an Bedeutung, wenn es neben der ständigen Anwendung im Unterricht auch in die Lernzielkontrollen systematisch und regelmäßig eingebaut wird.

→ **Rechenschaftsablagen:** In den Rechenschaftsablagen sollte auf die Grundwissensinhalte sowohl der letzten als auch der weiter zurückliegenden Stunden eingegangen werden. Im letzten Fall eignen sich besonders die bereits beschriebenen Karteikärtchen.

→ **Schriftliche Leistungserhebungen:** Vergleichbar mit den mündlichen Leistungserhebungen sollten auch in Stegreifaufgaben, Kurzarbeiten und Schulaufgaben zurückliegende Grundwissensinhalte gefordert werden. In diesem Zusammenhang ist ebenso an Jahrgangsstufentests zu denken, wie sie das ISB für das Fach Natur und Technik in der 6. Jahrgangsstufe anbietet. Ein solcher Test – am Ende der 10. Jahrgangsstufe durchgeführt – könnte Schülern und Lehrern Aufschluss darüber geben, was in der bisherigen Schulzeit in den Fächern Biologie und Chemie langfristig angelegt und erreicht wurde.

Wissen auf unterschiedlichen Verständnisebenen entwickeln

Von Franz Anneser und Rolf Herold

In der blauen Schachtel liegen vier Hölzer mehr als in der orangen.

x	5	6	7	8	9	10
y	1	2	3	4	5	6

$x = y + 4$

Die Repräsentationsebenen nach J. S. Bruner

Jerome Bruner[1] entwickelte in den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts ein Modell der kognitiven Entwicklung, das mittlerweile von der Hirnforschung weitgehend bestätigt wurde und in seinem konstruktivistischen Verständnis des Lernens als grundlegend für das SINUS-Programm betrachtet werden kann: Lernen ist nach Bruner ein aktiver Prozess. Fortschritte in der Intelligenzentwicklung können sich nur durch eine Auseinandersetzung mit der Umwelt vollziehen. Das Kind sammelt dabei Erfahrungen, die es mit bereits vorhandenen Kenntnissen in Beziehung setzen und abspeichern muss. Wie das Kind die Welt sieht, ändert sich im Lauf seiner Entwicklung, es wird dabei zunehmend weniger von Außenanreizen abhängig. Das Wissen entwickelt sich nach Bruner auf verschiedenen Repräsentationsebenen:

→ **Enaktive Ebene:** Das Wissen ist an Aktivitäten mit konkreten Gegenständen gebunden.
→ **Ikonische Ebene:** Das Wissen ist an bildliche Vorstellungen gebunden. Es kann jedoch ohne die Ausführung konkreter Handlungen abgerufen werden.
→ **Symbolische Ebene:** Das Wissen ist nicht mehr an bildliche Vorstellungen gebunden.

1_Bruner, J. S.: **Der Prozess der Erziehung**. Berlin 1970; (Originalausgabe: The Process of Education, 1960)

Kumulatives Lernen im Sinne des Spiralprinzips

Bruners Erkenntnisse bedeuten für das Fach Mathematik, dass der Einstieg in einen Themenbereich nicht aufgeschoben werden darf bis eine endgültige und abschließende Behandlung (in der Regel auf der symbolischen Ebene) möglich erscheint, sondern bereits auf früheren Stufen erfolgen soll. Natürlich muss dabei darauf geachtet werden, dass ein Ausbau auf höherem Niveau möglich ist. Die intellektuelle Entwicklung der Kinder erfolgt über mehrere Jahre von einer Ebene zur nächsten. Dabei löst eine Repräsentationsebene allmählich die vorangehende ab, ohne sie ganz überflüssig zu machen. Diese wiederholte Auseinandersetzung mit einer Thematik auf verschiedenen Ebenen mit zunehmenden Abstraktionsgraden wird häufig als „Spiralprinzip" bezeichnet und findet ihren Niederschlag in vielen neueren Lehrplänen.

Beispiel[2]:

Terme mit Variablen müssen behutsam eingeführt und über Jahre auf den verschiedenen Ebenen behandelt werden, um die Schülerinnen und Schüler letztendlich in die Lage zu bringen, auf abstrakter Ebene souverän mit ihnen umzugehen.

Die Säckchen enthalten Murmeln und zwar jeweils gleich viele. Drei Murmeln liegen außerhalb.

Zehnjährige benötigen durchaus noch den Umgang oder zumindest die visuelle Verknüpfung mit Säckchen und Murmeln, um später mit dem entsprechenden Term 2x + 3 umgehen zu können. Bei 14jährigen ist die enaktive Ebene mit dem Verpacken von Murmeln vollständig durch die symbolische Ebene ersetzbar. Für ein klares und unerschütterliches Verständnis entsprechender Termkonstruktionen muss jedoch die aktive und geduldige Auseinandersetzung mit Murmelsäckchen oder z. B. Hölzchenboxen vorausgegangen sein.
In didaktisch schwierigen Situationen kann ein Rückgriff auf die enaktive oder ikonische Ebene für das Verständnis hilfreich sein.

2_Nach: **Das Zahlenbuch 5**. Klett und Balmer, Zug 1999

Verständnis fördern durch das Nebeneinander unterschiedlicher Repräsentationsebenen

Die im Einstiegsbild S. 51 ausschnittsweise dargestellte Lernumgebung „Knack die Box" aus mathbu.ch 7[3], bei der es um die Ermittlung der möglichen Belegungen geht, spricht alle Repräsentationsebenen nach Bruner an:

→ Enaktive Repräsentation: In einer ersten Phase suchen die Schülerinnen und Schüler anhand von konkretem Material nach Lösungen von Gleichungen: Wie viele Hölzchen liegen in den blauen, wie viele in den roten Boxen, wenn auf beiden Seiten gleich viele Hölzchen liegen sollen?

→ Ikonische Repräsentation: Viele Schülerinnen und Schüler benötigen das konkrete Material bald nicht mehr, sondern arbeiten ausschließlich mit Zeichnungen. Dabei stehen rote und blaue Rechtecke für die Boxen und Striche für die Hölzchen, die außen liegen.

→ Symbolische Repräsentation: Mit Worten wird die Boxensituation so erklärt, dass ein anderer die Situation nachbauen könnte. In einem weiteren Schritt steht für die Anzahl der Hölzchen in der blauen Box die Variable x, für die Anzahl in der roten die Variable y. Die Wertetabelle endlich repräsentiert die Lösung des Problems.

Dabei ist wesentlich, dass in allen Repräsentationsebenen die „Platzhalter" (Säckchen, Boxen, Rechtecke, Buchstaben) für die Anzahl der enthaltenen Objekte stehen.

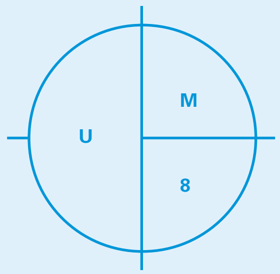
Durch das Nebeneinander der verschiedenen Repräsentationsebenen wird ein grundlegendes Verständnis für den Variablenbegriff und Gleichungen gelegt und funktionales Denken vorbereitet. Lernumgebungen wie „Knack die Box" werden von den Schülerinnen und Schülern als leicht empfunden. Der Grund dafür liegt in der gleichzeitigen Verwendung verschiedener Repräsentationsebenen. Im Übungsteil werden sie dazu angehalten, von einer Ebene in die andere umzuschalten. Sie stellen dabei fest, dass es leichter ist, aus der Boxensituation eine Wertetabelle zu entwickeln als z. B. aus einer Wertetabelle eine Gleichung. Aber nach einiger Zeit schaffen die meisten Schülerinnen und Schüler auch diesen Schritt fast

3_**mathbu.ch 7**. Klett und Balmer, Zug, 2002

mühelos. Die Funktionsgleichung wird dann als einfachste und übersichtlichste Darstellungsform einer Funktion wahrgenommen, deren konkrete Bedeutung deutlich ist.
Mit einem Unterricht, in dem die verschiedenen Repräsentationsebenen beachtet werden, wird zwangsläufig auch Rücksicht auf die verschiedenen Lerntypen genommen. Sie finden den für sie passenden Zugang zum jeweiligen Stoffgebiet.

Problemstellungen, die eine Bearbeitung auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen zulassen, sollten Bestandteil einer neuen Unterrichtskultur sein. Den Lernenden werden dadurch individuelle Zugänge und verschiedene Lösungsstrategien ermöglicht. Mit zunehmender Reife und Übung werden sie von selbst am liebsten auf der Ebene arbeiten, die mit den wenigsten Mühen verbunden ist. Die Mathematik wird dann mit ihren Hilfsmitteln als Erleichterung und nicht als Hürde für die Lösung wahrgenommen.

Beispiel[4]:
Petra verteilt Haselnüsse. Ulrike erhält die Hälfte der Haselnüsse, Matthias die Hälfte des Rests und für Petra bleiben noch 8 Haselnüsse. Wie viele Haselnüsse hatte sie am Anfang?

Informative Figur	**Tabelle, systematisches Probieren**				
		1. V	2. V	3. V	
	Gedachte Anzahl	20	28	32	x
	Anzahl U	10	14	16	0,5 x
	Anzahl M	5	7	8	0,25 x
	übrig	5	7	8	
	Soll	8	8	8	8
		f	f	r	
Gleichung					
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 8 = x$					

Mit den vorgeschlagenen Lösungsstrategien werden unterschiedliche Repräsentationsebenen angesprochen. Ein Schüler, dem die Möglichkeit eines Wechsels zwischen diesen Ebenen bewusst ist, und der sich frei für eine der Ebenen entscheiden kann, wird die Aufgabe lösen können.

4_Aus dem **Jahrgangsstufentest** 2005, 8. Jahrgangstufe, Realschule Bayern

Unterrichtsbeispiele

Im Folgenden wird anhand einiger weiterer Beispiele dargestellt, wie die unterschiedlichen Repräsentationsebenen im Mathematikunterricht berücksichtigt werden können.

Gleichungen

Bereits in der Grundschule können relativ komplexe Gleichungen aufgestellt und gelöst werden, wenn man auf formale Darstellungsformen verzichtet. Auf das dabei gefundene Handlungsmuster, nämlich die Strategie „Rückwärtsarbeiten“, sollte bis in die 8. Jahrgangsstufe immer wieder zurückgegriffen werden. Die folgende visuelle Darstellung[5] eignet sich schon ab dem 4. Grundschuljahr.

Beispiel 1:
→ **Sprachliche Darstellung** (symbolische Ebene):
„Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie mit 2, addiere 18, dividiere das Ergebnis durch 3 und erhalte 20. Wie heißt die Zahl?“
→ **Visuelle Darstellung** (ikonische Ebene):
Die gesuchte Zahl und die Zwischenergebnisse werden auf die Rückseite eines Papierblattes geschrieben und damit das Rätsel an der Tafel visualisiert.

$$\square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{+18} \square \xrightarrow{:3} \boxed{20}$$

→ **Formale Darstellung** (symbolische Ebene):
$(x \cdot 2 + 18) : 3 = 20$

Beispiel 2:
→ **Formale Darstellung** (symbolische Ebene)
$(44 - x) \cdot 3 = 117$

→ **Visuelle Darstellung** (ikonische Ebene)

$$\square \xrightarrow{\text{Vorzeichen-wechsel}} \square \xrightarrow{+44} \square \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{117}$$

Bruchvorstellung

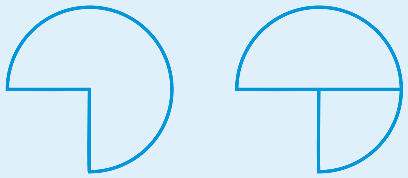
Um bei der Einführung der Bruchrechnung ein grundlegendes Verständnis zu erreichen, muss ein großer Teil der zur Verfügung stehenden Zeit für die enaktive und ikonische Ebene verwendet werden. Die Kinder sollten Brüche z. B. als Kreisteile legen, im Rechtecksmodell vergleichen, addieren und subtrahieren. Erst wenn ihnen die zeichnerischen Lösungen zu umständlich und zu aufwändig werden, ist die Zeit gekommen, auf symbolischer Ebene zu arbei-

5_**Das Zahlenbuch 4.** Lehrerband S. 184, Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 2003 ten, das heißt die entsprechenden Rechenregeln zu formulieren und anzuwenden. Diese ergeben sich als Folge des bereits gewonnenen Verständnisses und sind nicht Ausgangspunkt des Unterrichts.

Beispiele für entsprechende Aufträge:

➔ Nimm zwei Bruchteile (als **Kreissektoren** dargestellt) und lege damit einen neuen Bruchteil eines Kreises. Beschreibe ihn.

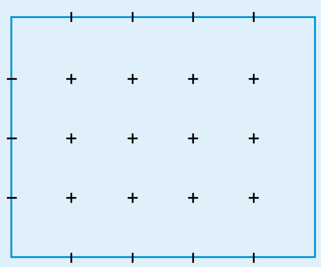
➔ Ein Halbes und ein Viertel sind gleich groß wie drei Viertel. Stelle möglichst viele Beispiele zusammen!



➔ Lege aus den Kreisteilen auf unterschiedliche Weise zwei Ganze. Lege auch 3 Ganze und 4 Ganze. Notiere deine Ergebnisse.

➔ Ich erhalte zwei Ganze, wenn ich ....

➔ Löse die Aufgabe $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$ mithilfe des Rechteckmodells:



Vorgehen: Kennzeichne farbig ein Viertel und in einer anderen Farbe ein Fünftel des Rechteckes. Was fällt dir auf? Mit ein wenig Nachdenken kannst du jetzt die Lösung der Aufgabe angeben.

Das Rechtecksmodell ist auch sehr geeignet, um die Multiplikation von Brüchen zu veranschaulichen.

Multiplikation

Schülerinnen und Schüler, die aus der Grundschule kommen, können zwar zu diesem Zeitpunkt Multiplikationsaufgaben bereits auf symbolischer Ebene bearbeiten, haben aber die Multiplikation noch lange nicht in all ihren Facetten erfasst und sicher verankert. Viele

typische Fehler und Schwächen können auf diese Ursache zurück geführt werden. Ein sicheres Verständnis der Multiplikation ist eines der Hauptziele des Mathematikunterrichts bis zur 9. Jahrgangsstufe. Je schneller dieses erreicht wird, desto effizienter wird der Unterricht.

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten der Behandlung von Multiplikationsaufgaben auf ikonischer Ebene vorgestellt:

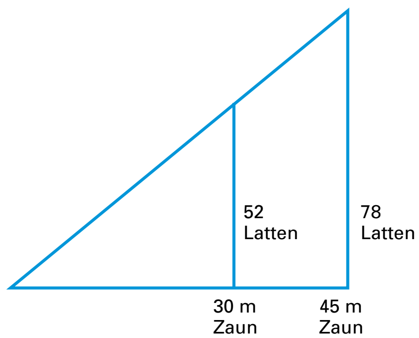
Flächenaspekt

➔ Der **Flächenaspekt** der Multiplikation, Arbeiten mit Multiplikationstabellen: Die Multiplikation zweier positiver Zahlen lässt sich immer als Berechnung einer Fläche interpretieren. Dieser Aspekt der Multiplikation fließt (teilweise in übertragenem Sinn) beim Arbeiten mit Multiplikationstabellen ein und ermöglicht über die Jahrgangsstufen hinweg bis hin zum Multiplizieren von Termen eine visuelle Darstellung von Produkten. Der Flächenaspekt der Multiplikation wird auf S. 20 ff ausführlich darstellt.

Vergrößerungsaspekt

➔ Der **Vergrößerungsaspekt** der Multiplikation, Arbeiten mit Treppenskizzen

Üblicherweise erhält erst bei der Behandlung der zentrischen Streckung in der 9. Jahrgangsstufe ein Aspekt der Multiplikation einen geometrischen Bezug, der schon viel früher wichtig wäre.



Mit so genannten „Treppenskizzen“ wird der Vergrößerungsaspekt der Multiplikation deutlich. Treppenskizzen lassen sich immer dann zur visuellen Darstellung einsetzen, wenn eine direkte Proportionalität den Hintergrund bildet, z. B. beim Kürzen von Brüchen, beim Umrechnen zwischen maßstäblichen Vergrößerungen oder Verkleinerungen, beim Auswerten von Hochrechnungen, beim Erstellen von Kreisdiagrammen, beim Prozentrechnen, bei Geradensteigungen, bei der zentrischen Streckung und bei Steigung und Tangens.

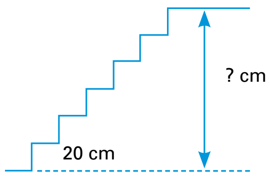
Die hier vorgestellte Auswahl von Einsatzmöglichkeiten von „Treppenskizzen“ soll ein wenig Mut dazu machen, den Wechsel von der abstrakten Aufgabenstellung auf eine sehr anschauliche Verständnisebene immer wieder einmal anzubieten.

Ausgangspunkt einer Unterrichtssequenz zum Thema **Dreisatz** war folgender Auftrag:

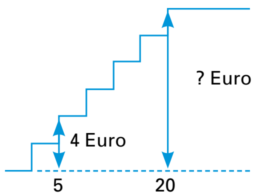
> Bestimme mit dem Geodreieck, wie hoch das erste Geschoss im Schulhaus über dem Erdgeschoss liegt.

Die Schülerinnen und Schüler stürmten aus dem Klassenzimmer und schon nach kurzer Zeit kamen die ersten mit einem brauchbaren Ergebnis zurück. Etliche hatten einfach die Höhe einer Treppenstufe gemessen und mit der Anzahl der Stufen multipliziert.

Bei der Veranschaulichung im anschließenden Gespräch entstand die Treppenskizze:



Es fiel den Schülerinnen und Schülern dann auch eine Aufgabenstellung zum Dreisatz leicht, nämlich aus einer gegebenen Höhe von 5 Stufen auf die gesamte Treppenhöhe zu schließen. Man musste eben zuerst auf eine Treppenstufe zurückrechnen.
Dann konnte von der „Treppe“ zur Verallgemeinerung übergegangen werden, wie bei Sachaufgaben wie: „5 Äpfel kosten 1,50 Euro, wie viel kosten 20 Äpfel?“ vorkommt.

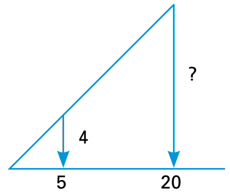


Wie der Kommentar eines Schülers (8. jahrgangsstufe) zeigt, kann diese Art der Skizze auch Schülerinnen und Schülern in höheren Jahrgangsstufen viel helfen.

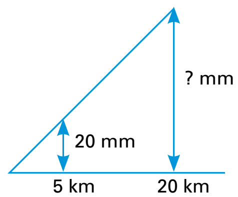
Die Treppenskizze eignet sich hervorragend für solche Aufgaben, denn nach meiner Empfindung ist es anschaulicher als eine einfach hinge-schriebene Aufgabe. Bei einer Treppenskizze kann man sich die Aufgaben viel besser vorstellen.

An dieser Stelle daher als Anregung noch einige Einsatzbeispiele für „Treppenskizzen“:

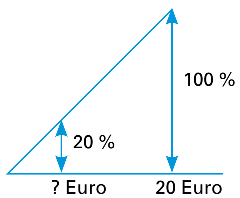
➔ Erweitere $\frac{4}{5}$ auf Zwanzigstel



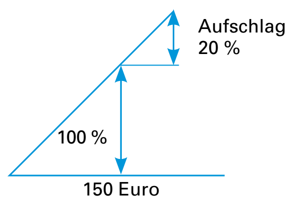
➔ Maßstäbliches Zeichnen



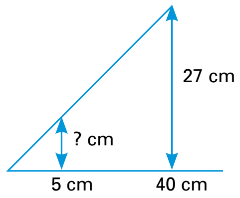
➔ Prozentwerte



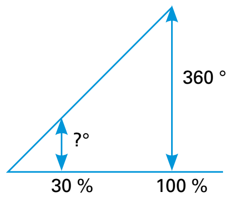
➔ Vermehrter Grundwert



➔ Vierstreckensatz (Strahlensatz)



➔ Kreisdiagramm



In allen Fällen spielt die „Höhe einer Stufe“, die in der 5. Klasse konkret gemessen wird, eine wichtige Rolle und natürlich die Tatsache, dass eine „vernünftige“, das heißt lineare Treppe überall gleich hohe Stufen hat.

Beim Arbeiten mit Treppenskizzen erfolgen bereits in den Jahrgangsstufen 5 und 6 Vorbereitungen für die spätere Behandlung der Themenbereiche „lineare Funktionen“ und „zentrische Streckung“ und bei der Behandlung dieser Themen können Treppenskizzen dann gewinnbringend wieder aufgegriffen werden. Es werden somit über die Jahrgangsstufen hinweg Zusammenhänge zwischen Themenbereichen herausgestellt, die für die Schülerinnen und Schüler nicht offensichtlich sind.