Vorstellungen aufbauen

Von Heidrun vorm Walde unter Mitarbeit von Christian Geus

Vorstellungen als Schlüssel für das Verständnis

Bedeutung von Vorstellungen im Fach Mathematik

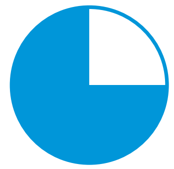
»Es gibt eine Kenntnis, die diesen Namen nicht verdient, eine erniedrigte und erniedrigende, insofern sie uns nur zu Ausführenden eines automatischen Ablaufs macht.«

Mit dieser Aussage hat Martin Wagenschein bereits 1948 in einem Aufsatz[1] auf Probleme hingewiesen, die durch ein rein nachvollziehendes Erlernen von Mathematik entstehen, bei dem die Inhalte nicht ausreichend mit Vorstellungen verknüpft werden. Die mathematischen Fähigkeiten bleiben dann auf das Anwenden von Regeln oder Formeln und das Durchführen von einstudierten Algorithmen bei vertrauten Aufgabenstellungen beschränkt. Ein Transfer der Kenntnisse auf neue Problemstellungen oder die Nutzung der

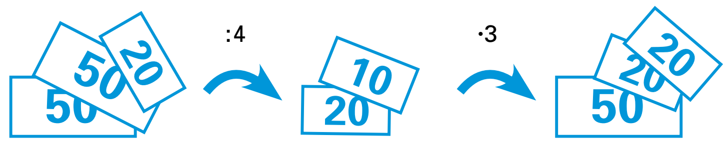
1_Wagenschein M.: **Zweierlei Wissen.** In Schola 3 (1948)5, S. 296-297

Mathematik als Werkzeug zur Modellierung ist nicht möglich. Vorstellungen müssen nicht immer bildlicher Natur sein. In diesem Artikel sind damit allgemein sinnerfüllte Konzepte gemeint, die das mathematische Wissen bei den Schülerinnen und Schülern repräsentieren. Häufig sind sogar ganz verschiedenartige Vorstellungen erforderlich, um ein Thema in ganzer Bandbreite zu erfassen. So sollte zum Beispiel der Bruchbegriff mit folgenden Vorstellungen verknüpft sein:[2]

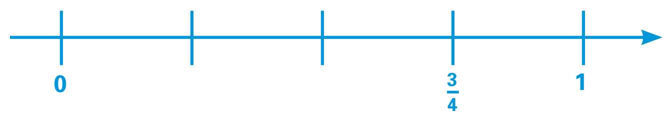
Anteilsvorstellung: Maria hat eine $\frac{3}{4}$ Pizza
(Bruch als Teil eines Ganzen)



Operator-Vorstellung: Michi gewinnt $\frac{3}{4}$ von 120 €.
Wie viel Geld erhält er? (Bruch als Rechenanweisung bzw. als relative Größenangabe)



Zahlvorstellung: (Bruch als Bezeichnung für eine Zahl bzw. als absolute Größenangabe)



In jüngster Zeit haben sich mehrere Studien mit Schülervorstellungen befasst.[3] Von besonderer Bedeutung ist die übereinstimmende Feststellung, dass Fehler – insbesondere auch solche, die landläufig gerne als reine Flüchtigkeitsfehler interpretiert werden – häufig durch Vorstellungsdefizite verursacht werden. So waren bei einer Erhebung im Rahmen des PALMA-Projektes ungefähr die Hälfte aller Fehler auf nicht ausreichende oder nicht adäquat erweiterte Grundvorstellungen zurückzuführen. Schülerinnen und Schülern in Jahrgangsstufe 6 der Schularten Hauptschule, Realschule und Gymnasium wurde hierbei u. a. die folgende Aufgabe gestellt:

2_Blum W., Wiegand B.: **Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande?** In: Blum W., Neubrand M.: TIMSS und der Mathematikunterricht; Hannover 1998
3_Zum Beispiel PALMA **www.uni-regensburg.de/ Fakultaeten/nat_Fak_I/BIQUA/)**

Gibt es einen Bruch, der größer als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist?

Nur 22% der Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten diese Frage richtig beantworten. In Gesprächen stellte sich heraus, dass der Grund für eine falsche Antwort häufig in der Überlegung lag, dass es zwischen 2 und 3 keine natürliche Zahl und somit zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ auch keinen Bruch gibt. In diesen Fällen ist es offenbar bei der Einführung der Bruchzahlen nicht gelungen, die Zahlvorstellung adäquat zu erweitern. Die entsprechenden Schülerinnen und Schüler verfügten über eine unzureichend ausgebildete Vorstellung von Bruchzahlen. Dies führte dazu, dass intuitiv Eigenschaften der vertrauteren natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen übertragen wurden.

Im Rahmen der genannten Untersuchungen haben sich neben dem Zahl-, insbesondere dem Bruchzahlverständnis, auch das Stellenwertverständnis und das Operationsverständnis bei den Punktrechenarten als besonders problematisch in Bezug auf Grundvorstellungen erwiesen.
Defizite in diesen Bereichen führen nahezu zwangsläufig auch zu Problemen bei verschiedenen weiterführenden Inhalten: Ein fundiertes Verständnis des Stellenwertsystems im Bereich der natürlichen Zahlen ist u. a. Voraussetzung für das Begreifen der rationalen Zahlen in Dezimalschreibweise, für das Rechnen mit Größen sowie für sinnvolles Runden. Fehlende oder fehlerhafte Vorstellungen in Zusammenhang mit der Multiplikation wirken sich beispielsweise beim Berechnen von Flächeninhalten und beim Rechnen mit Termen negativ aus. Werden derartige Lücken nicht erkannt, begleiten sie die Schüler häufig bis in die Oberstufe, wo auftretende Probleme meist nicht mehr in Zusammenhang mit defizitären Grundvorstellungen gebracht werden.

Konsequenzen für die Unterrichtspraxis

Überprüfung vorhandener Vorstellungen

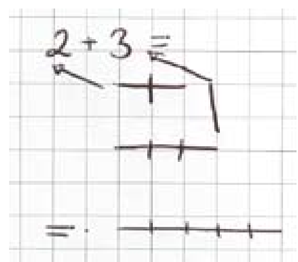
Bei der Erarbeitung neuer Inhalte ist es wichtig zu wissen, welche Vorstellungen die Schülerinnen und Schüler zu dem Thema bereits mitbringen. Es stellt sich also die Frage, wie sich vorhandene Vorstellungen überprüfen lassen.

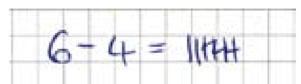
Ein geeignetes Mittel kann das **Visualisieren** mathematischer Inhalte sein. So erhielten zum Beispiel die Schülerinnen und Schüler einer 6. Realschulklasse folgenden Auftrag:

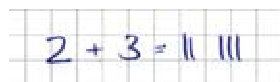
Zeichne zu jedem der folgenden Terme ein Bild, ohne dabei Zahlen oder Rechenzeichen zu verwenden:
2 + 3; 3 · 4; 6 - 4; 15 : 3.

Während die Strichrechnungen größtenteils gut bildlich dargestellt wurden, bereitete die Visualisierung der Punktrechungen Probleme. Nur wenige Schülerinnen und Schüler konnten passende Bilder zeichnen.

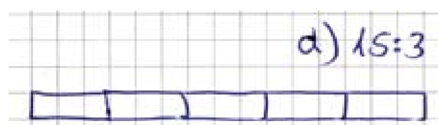
Strichrechnungen:



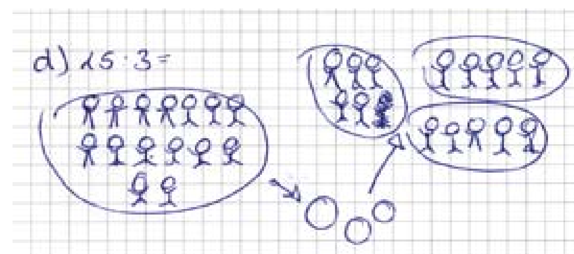




Division:

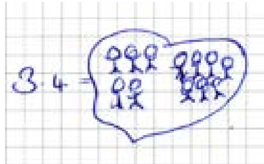


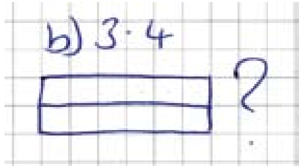
Es wurde anstatt auf 3 auf 5 aufgeteilt.



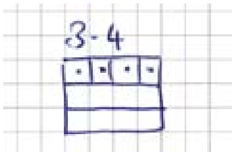
Richtige Lösung

Multiplikation:





Unbeholfene Lösungen (vom Rechenergebnis her gedacht)



Richtige Lösung

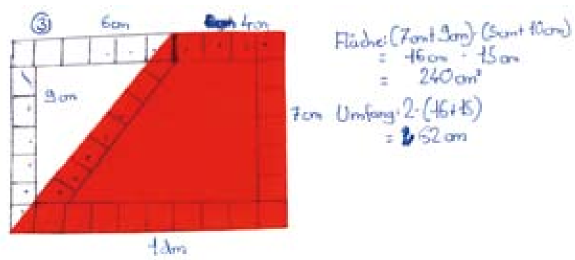
Dies lässt den Schluss zu, dass Multiplikation und Division bei den Schülern nicht ausreichend mit Vorstellungen verknüpft wurden.

In vielen Fällen lässt sich durch **Handeln mit geeignetem Material** Aufschluss über Vorstellungen gewinnen. In der 9. Klasse einer Realschule wurde den Schülern folgende Aufgabe gestellt:

Arbeitsaufträge zur Flächenbestimmung:
Schneide zunächst die Flächenstücke aus. Klebe eine Fläche in dein Experimentierheft und bestimme mithilfe der Quadratzentimeterplättchen ihren Inhalt so genau wie möglich.

(Abb. verkleinert)

Hierzu die Lösung einer Schülerin:



Es wird deutlich, dass die Schülerin weder eine Größenvorstellung von 240 cm², noch eine Vorstellung von der Bedeutung der Formel „Länge mal Breite" zur der Berechnung der Rechtecksfläche besitzt.

Eine weitere Methode zum Ergründen von Vorstellungen ist das **Schreiben von Rechengeschichten**. In einer 5. Realschulklasse wurde dazu folgende Aufgabe gestellt:

Schreibe selbst eine Textaufgabe, bei der folgende Rechnung zum Ergebnis führt:

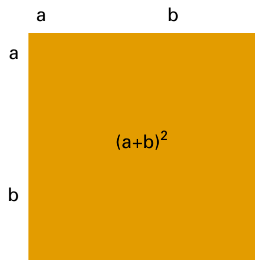
a) 12 m : 3 m = b) 12 m : 3 =

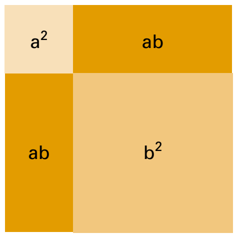
Von 32 Schülerinnen und Schülern haben nur 8 zu beiden Rechnungen einen passenden Kontext gefunden. 13 Schülerinnen und Schüler haben in beiden Fällen falsche Textaufgaben angegeben oder konnten überhaupt keine Aufgabe finden.

<u>Beispiele für richtige Lösungen (Wortlaut der Schüler):</u>
➔ 12 m : 3 m
Herr Mayr hat eine 12 m lange Latte. Er möchte sie in gleich lange Latten sägen. Jede sollte 3 m lang sein. Wie viel Latten erhält er?
➔ 12 m : 3
Fritz teilt einen 12 m langen Stecken in 3 gleich große Teile. Wie lang ist ein Teil?

<u>Beispiele für falsche Lösungen:</u>
➔ 12 m : 3 m
Jan hat mit seinem Opa eine Radtour vor. Sie wollen 12 km fahren. Am ersten Tag fahren sie 3 km, am 2. Tag 4 km und am dritten Tag fahren sie 5 km.
Wie viele Meter Zaun bräuchte man, wenn man 12 Meter umranden will und für das Tor 3 m frei lässt?
➔ 12m : 3 =
Eine Rutsche ist 12 m lang. Sie soll aber abgebaut werden. Sie wird durch vier geteilt. Wie oft muss man die Rutsche teilen?
Wenn mein Haus 12 m hoch ist, werden 3 Stücke neu gestrichen. Wie viele Stücke muss ich noch streichen?

Förderung des Aufbaus von Vorstellungen im Unterricht





Bei der Erarbeitung neuer mathematischer Inhalte sollten vorhandene Schülervorstellungen aufgegriffen und ggf. korrigiert werden. Anschließend müssen diese adäquat erweitert oder neue Vorstellungen aufgebaut werden. Dies gelingt nicht, indem die Lehrkraft im Rahmen der Erarbeitung des neuen Stoffes kurz auf die entsprechenden Vorstellungen eingeht. Die Hoffnung, dass die Schüler diese übernehmen und dann erfolgreich damit arbeiten können, erfüllt sich nämlich in der Regel nicht. Sehr deutlich lässt sich dies zum Beispiel beim Erlernen der binomischen Formeln erkennen: Der überwiegende Teil der Lehrkräfte führt diese zwar anhand einer bildlichen Darstellung (siehe Abbildung links) ein. Meist wird die entsprechende Vorstellung im weiteren Unterrichtsverlauf aber nicht mehr herangezogen und nur noch das formale Anwenden der Formeln trainiert. Es treten häufig Fehler der Art $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ auf, die bildliche Vorstellung wurde also nicht verinnerlicht. Hier ist es von großem Vorteil, wenn mit Multiplikationstafeln gearbeitet wird, wie es auf Seite 24 ff beschrieben ist.

Als besonders günstig für den Aufbau von Vorstellungen hat es sich erwiesen, wenn sich die Schülerinnen und Schüler bei der Erarbeitung neuer Inhalte anhand geeigneter Arbeitsaufträge zunächst längere Zeit selbständig mit der Thematik auseinandersetzen. Sie haben dann die Möglichkeit, Hypothesen aufzustellen, diese zu überprüfen und so eigene Erkenntnisse zu gewinnen. Im Idealfall werden in den Aufträgen unterschiedliche Repräsentationsebenen des Wissens angesprochen und dadurch verschiedene Zugänge ermöglicht. Anschließend werden verschiedene Ergebnisse in der Klasse vorgestellt und durch die Lehrkraft zusätzliche Aspekte eingebracht. So werden die entwickelten Vorstellungen erweitert oder ggf. korrigiert. Erst nach dieser Phase des Vorstellungsaufbaus, die keinesfalls zu kurz ausfallen sollte[4], darf eine Formalisierung erfolgen, bzw. Wert auf Routinen und Automatismen gelegt werden. Durch eine zu frühe Schematisierung wird der Aufbau von Vorstellungen behindert.

Siehe auch S. 51 ff

Um einmal erworbene Vorstellungen zu sichern, müssen diese auch nach der Abstrahierung immer wieder aufgegriffen und in neuen Sachzusammenhängen angewandt und gegebenenfalls erweitert werden. „Im Idealfall entwickeln sich Grundvorstellungen zu einem dynamischen, tragfähigen Netzwerk mentaler Modelle, das durch Ergänzen und Reorganisation immer leistungsfähiger wird.“[5]

4_**„Wenn du wenig Zeit hast, nimm dir viel davon am Anfang“** (Ruth Cohn)
5_**www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/BIQUA/**

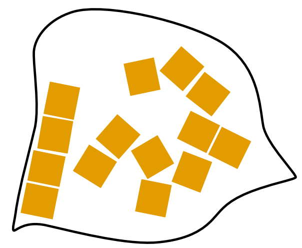
Beispiele zur Umsetzung

Umfang, Flächeninhalt, Volumen und Oberfläche von Figuren bzw. Körpern

Viele Schülerinnen und Schüler haben auch in höheren Jahrgangsstufen noch Schwierigkeiten, Umfang, Flächeninhalt, Volumen oder Oberflächen einfacher Figuren oder Körper zu bestimmen. Offenbar fehlt häufig die Grundvorstellung, dass diese Größen prinzipiell durch Vergleichen mit einer Grundgröße – also durch Messen – bestimmt werden. Die Bedeutung dieser Vorstellung wird auch in den Bildungsstandards betont, in denen das Messen ausdrücklich als Leitidee verankert ist.[6]

Die Berechnung von Umfang oder Flächeninhalt anhand von Formeln stellt bereits eine Abstraktion dar, die erst erfolgen darf, wenn die Grundvorstellung sicher verankert ist. Zuvor müssen die Schüler die entsprechende Handlung, also z. B. das Ermitteln des Umfangs einer Figur mithilfe eines Lineals oder das Bestimmen des Flächeninhalts der Figur durch das Auslegen mit Quadratzentimeterplättchen (oder das Rückführen auf andere bekannte Flächen) wiederholt selbst ausführen. Es genügt nicht, wenn dies durch einzelne Schüler oder die Lehrkraft an der Tafel geschieht.

Eine entsprechende Vorgehensweise sollte sich durch alle Jahrgangsstufen ziehen. Auch in höheren Klassen sollten der Erarbeitung von Formeln zur Berechnung von Umfang, Flächeninhalt, Volumen oder Oberfläche des jeweils betrachteten Figuren- oder Körpertyps selbständige Messvorgänge der Schülerinnen und Schüler vorausgehen.
Bei Vorgabe unterschiedlicher Grundeinheiten (siehe Abbildung) ist auch immer wieder das Umrechnen von Größen gefordert und wird somit nicht zum Selbstzweck.



Wenn die Schülerinnen und Schüler die mit dem Flächeninhalt verbundenen Grundvorstellungen verinnerlicht haben, können sie bereits in Jahrgangsstufe 5 Inhalte von unregelmäßigen oder unbekannten Flächen (z. B. auch Kreisflächen) mit Hilfe von Quadratzentimeterplättchen näherungsweise ermitteln. Werden entsprechende Arbeitsweisen in den folgenden Jahrgangsstufen regelmäßig wiederholt, ist zu erwarten, dass beim Bearbeiten einer Aufgabe zur Flächenbestimmung, wie sie auf Seite 20 vorgestellt wurde, weniger Probleme auftreten.

6_**www.kmk.org/schul/home1.htm**

Auch Problemstellungen wie die folgende (aus PISA 2000[7]) stellen dann keine unüberwindbare Hürde mehr dar:

Hier siehst du eine Karte der Antarktis. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Ausmultiplizieren von Summentermen und Faktorisieren

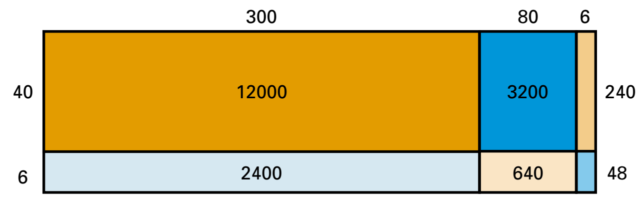
Ein weiterer Problembereich ist für viele Schülerinnen und Schüler das Vereinfachen von Termen. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, wenn Termumformungen bis zu einem gewissen Grad mit Vorstellungen verbunden sind. Beim Ausmultiplizieren von Summen eignen sich hierzu Multiplikationstafeln, die den Schülerinnen und Schülern in der Regel bereits aus der Grundschule vertraut sind. Die damit verbundene (Flächen-) Vorstellung zur Multiplikation kann (und sollte) in der Sekundarstufe immer wieder aufgegriffen und weiterentwickelt werden. So lässt sich dieses Thema kumulativ unterrichten und die Lernenden erkennen ein durchgängiges Prinzip.

Multiplikation natürlicher Zahlen:

Eine produktive Aufgabe in Jahrgangsstufe 5 könnte lauten: Mache aus der „großen Malaufgabe 386 • 48 mehrere „kleine Malaufgaben", deren Ergebnis leicht zu berechnen ist.

Den geometrischen Hintergrund dieser Aufgabe kann man sich als Auftrag zum Berechnen einer Fläche vorstellen. Eine Seitenlänge wird aufgeteilt in 300, 80 und 6 Einheiten, die andere in 40 und 8 Einheiten. So werden schließlich 6 Teilflächen berechnet, die zusammen addiert wieder die Gesamtfläche ergeben.

7_www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.pdf



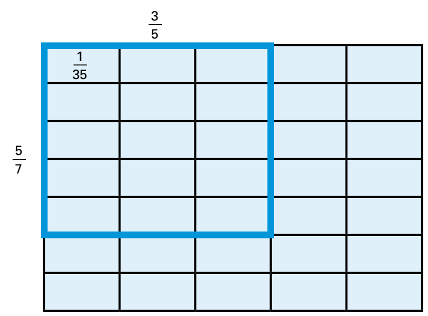
Folgender Abstraktionsschritt zeigt eine Vorstufe zum schriftlichen Normalverfahren für die Multiplikation:

·	300	80	6	
40	12000	3200	240	15440
8	2400	640	48	3088
	14400	3840	288	18528

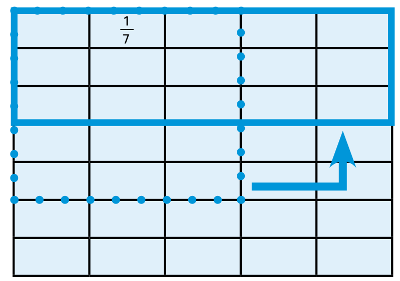
Also: $386 \cdot 48 = 18528$

In Zusammenhang mit der Multiplikation von Bruchzahlen bzw. gemischten Zahlen kann der Flächenaspekt der Multiplikation wieder thematisiert und – beim Multiplizieren gemischter Zahlen – das Arbeiten mit Multiplikationstafeln aufgefrischt werden:

Multiplikation von Bruchzahlen: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$

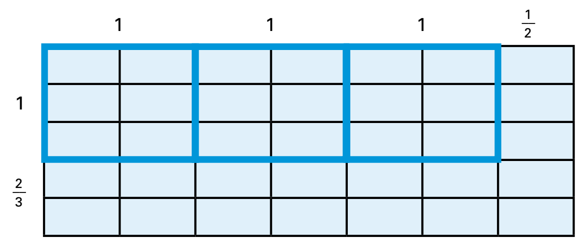


$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{35}$



$\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

Multiplikation gemischter Zahlen: $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3}$



	3	$\frac{1}{2}$	
1	3	3	$3\frac{3}{6}$
$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{6}$
	5	$\frac{5}{6}$	$5\frac{5}{6}$

Flächendarstellung: $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

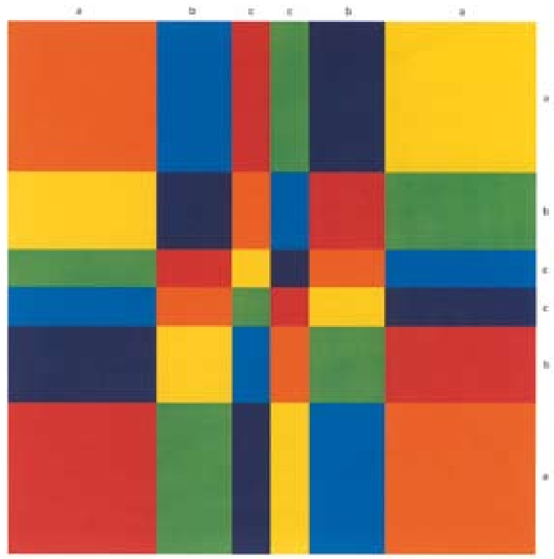
Also: $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} = 5\frac{5}{6}$

Der Flächenaspekt bei der Multiplikation kann in weiteren Zusammenhängen gewinnbringend eingesetzt werden.

Die folgenden Arbeitsaufträge[8] zeigen schließlich einen auf dem Flächenaspekt beruhenden Zugang zur Thematik „Ausmultiplizieren von Summentermen“, der es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, ihre Vorstellungen zum Thema selbständig weiter auszubauen.

Ein Bild von Richard Paul Lohse

Der Schweizer Maler Richard Paul Lohse hat 1983 das Bild „6 komplementäre Farbreihen“ gemalt.



➔ Beschreibe das Bild. Welche Gesetzmäßigkeiten findest du?

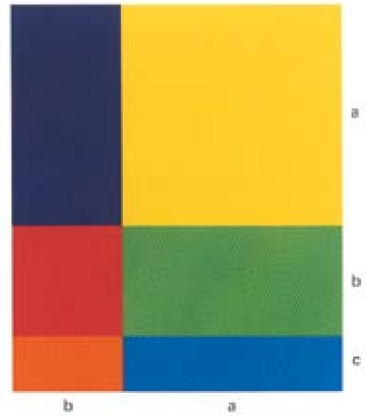
➔ Die Variablen am Rand bezeichnen die Längen, die im Bild vorkommen. Mit den Variablen kann man auch zusammengesetzte Längen ausdrücken. Die Länge des ganzen Bildes ist zum Beispiel
$a + b + c + c + b + a$ oder anders geschrieben $2a + 2b + 2c$.
Erkläre beide Terme.

➔ Mit den Variablen kann man auch Flächen ausdrücken. Zum gelben Quadrat oben rechts gehört zum Beispiel der Term $a \cdot a = a^2$. Zum grünen Rechteck darunter gehört der Term $a \cdot b = ab$.

8_Nach **Mathbu.ch 7**. Klett und Balmer; Zug, 2002

➔ Alle orangenen Flächen zusammen kann man durch den Term $2a^2 + 4bc$ bestimmen. Prüfe dies nach. Stelle auch die Terme auf, die zu den anderen Farben gehören.

➔ Die drei Flächen in dem Bildausschnitt unten links bilden zusammen ein Rechteck. Man kann dessen Fläche auf zwei verschiedene Arten beschreiben: $a \cdot (c + b + a)$ oder $ac + ab + a^2$. Die beiden Terme sind also äquivalent. Beschreibe die Fläche des unten rechts abgebildeten Ausschnitts ebenso durch verschiedene Terme. Gib auch den Umfang des Ausschnitts an.



➔ Suche einen rechteckigen Bildausschnitt, dessen Fläche sich durch den Term $(b + c) \cdot (b + 2c)$ beschreiben lässt. Gib einen anderen äquivalenten Term für die Fläche dieses Ausschnitts an.

➔ Entnimm dem Bild selbst zusammengesetzte Rechtecke. Zeichne sie ab, beschrifte sie und drücke ihre Flächen durch verschiedene äquivalente Terme aus. Tausche die Terme mit Mitschülerinnen oder Mitschülern aus und sucht dazugehörende Flächen. Vergleicht.

Damit die gewonnenen Vorstellungen gefestigt werden, müssen die Lernenden anschließend über einen längeren Zeitraum hinweg damit arbeiten. Daher sollten beim Ausmultiplizieren und Faktorisieren Multiplikationstafeln verwendet werden. Ein zu schneller Übergang zum formalen Ausmultiplizieren würde die Vorstellungen schnell verdrängen.

<u>Ausmultiplizieren von Summentermen:</u>

Beispiel 1: $(3 + x) \cdot (-4x + 5y)$

$\cdot$	3	x
-4x	-12x	$-4x^2$
5y	15y	5xy

Also: $(3 + x) \cdot (-4x + 5y) = -12x - 4x^2 + 15y + 5xy$

Beispiel 2: $(-3a - 5b)^2$

$\cdot$	-3a	-5b
-3a	$9a^2$	15ab
-5b	15ab	$25b^2$

Also: $(-3a - 5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$

Faktorisieren:

Beispiel: $4x^2 - 16x + 16$

$\cdot$	2x	-4
2x	$4x^2$	-8x
-4	-8x	16

oder

$\cdot$	-2x	4
-2x	$4x^2$	-8x
4	-8x	16

Also: $4x^2 - 16x + 16 = (2x - 4)^2$ oder $(-2x + 4)^2$

Die Schülerinnen und Schüler verteilen zunächst die Summenwerte in den „Ergebnisfeldern". Sie stellen auch fest, dass $4x^2$ und 16 nicht in einer Zeile bzw. Spalte stehen können, da sie nicht miteinander „verträglich" sind. Anschließend werden die Faktoren ermittelt.

<u>Erfahrungen:</u>

In einer 8. Klasse einer Realschule wurden Produkte von Summentermen und das Faktorisieren ausschließlich mit der Multiplikationstafel durchgeführt. In einem anschließenden Test erzielten die Schülerinnen und Schüler sowohl beim Multiplizieren von Summentermen als auch beim Faktorisieren erstaunlich gute Ergebnisse. Auch bei einer weiteren Überprüfung zu einem späteren Zeitpunkt war das Wissen noch sicher verfügbar.

Ausschnitt aus dem Test:

Faktorisiere

a) $36x^2 - 64y^2 =$

b) $144a^2 - 72a + 9 =$

c) $6xy - 2x^3 - 12 y + 4x^2 =$

Aufgaben a) und b) lösten 75 % der Schüler ohne Fehler. Und noch erstaunlicher ist, dass sogar Aufgabe c) von 71% der Schülerinnen und Schüler absolut richtig gelöst wurde und das nur mit Hilfe einer Multiplikationstafel (Schülerlösungen siehe Abbildung).