

Mathematik

Gymnasium

Jgst. 10

Individuelle Förderung und Differenzierung durch Computereinsatz - die allgemeine Sinusfunktion

Die Bedeutungen der Parameter a , b und c bei der allgemeinen Sinusfunktion $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c)$ werden von den Schülerinnen und Schülern unter Verwendung des Computerprogramms „GeoGebra“ selbständig erarbeitet. Dazu untersuchen sie mithilfe von dynamischen Arbeitsblättern schrittweise den Einfluss der einzelnen Parameter auf den Graphen der Funktion. Anhand eines abschließenden Arbeitsblattes wird der Zusammenhang vertieft.

Häufig findet das Lernen im Mathematikunterricht im Klassenverband statt. Die Schüler/innen erarbeiten gewissermaßen im Gleichschritt neue mathematische Inhalte. Dabei bleibt für eigene Ideen bzw. Gedankengänge sicherlich nicht immer genug Raum und Zeit. Wann immer es – bezogen auf die Komplexität des mathematischen Stoffes – effizient realisierbar ist, sollte daher die Möglichkeit genutzt werden, den Schüler/innen in sinnvoller Art und Weise eine Erarbeitung des Lehrstoffes zu ermöglichen, die der selbständigen Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten genügend Raum gibt.



Abb. 1: SINUS-Moderatoren untersuchen die Sinusfunktion

Realisierbar ist dieser Ansatz zum Beispiel mithilfe des Computerprogramms „GeoGebra“. Dieses Programm bietet die Möglichkeit, so genannte „dynamische Arbeitsblätter“ zu erstellen, mit denen sich die Schüler/innen neue Sachverhalte eigenständig erarbeiten können. Diese Arbeitsblätter können als HTML-Dateien bequem mithilfe eines Browsers bearbeitet werden.

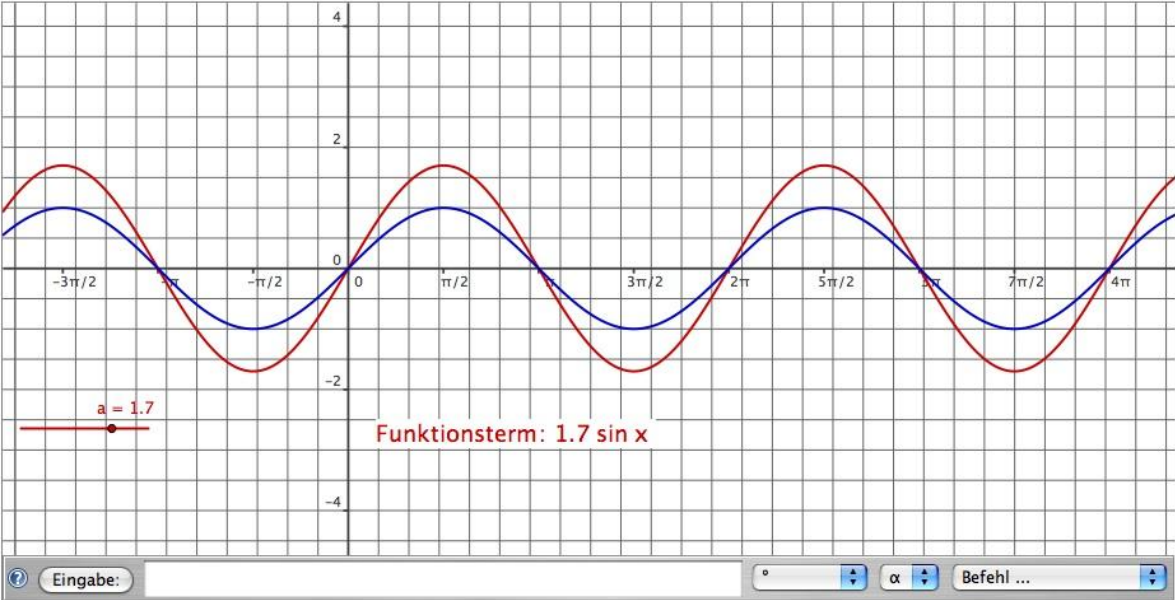
Auf den folgenden Seiten wird diese Vorgehensweise am Beispiel der allgemeinen Sinusfunktion $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c)$ vorgestellt. Der benötigte Zeitrahmen zur Bearbeitung der vier vorgestellten dynamischen Arbeitsblätter umfasst eine Schulstunde. Im Idealfall steht jeder Schülerin bzw. jedem Schüler ein eigener Computer zur Verfügung. Nachdem die Lernenden ein dynamisches Arbeitsblatt bearbeitet haben, kommen sie durch Klicken auf [Weiter] automatisch zum nächsten Arbeitsblatt.

„Ertasten“ der Thematik durch Variation des Schiebereglers

Nach dem Öffnen der ersten Datei erscheint ein dynamisches Arbeitsblatt im Fenster des Browsers:

Eigenschaften der Trigonometrischen Funktionen $x \rightarrow a \sin(x)$

Mit diesem Arbeitsblatt werden die Eigenschaften von Funktionen der Form $x \rightarrow a \sin(x)$ untersucht. Die blaue Kurve zeigt den Graphen der bereits bekannten Sinusfunktion.



Zunächst soll für den Schieberegler a der Bereich $0 < a \leq 4$ betrachtet werden. Variiere den Schieberegler im angegebenen Bereich.

- 1) Was verändert sich am Graphen, was bleibt gleich?
- 2) Den jeweils größten auftretenden Funktionswert nennt man Amplitude der Funktion $x \rightarrow a \sin(x)$. Warum entspricht die Amplitude jeweils genau dem Faktor a ?

Nun werden für a auch negative Werte betrachtet.

- 3) Was kannst du über die Amplitude für Funktionen mit $a < 0$ aussagen?
- 4) Wie hängen die Graphen der Funktionen $x \rightarrow -1,5 \sin(x)$ und $x \rightarrow 1,5 \sin(x)$ zusammen? Du kannst zur Untersuchung in die Eingabezeile den Term $s(x) = 1.5 \sin(x)$ eingeben. Ja, 1 Punkt 5, sonst geht es nicht :-)

[\[Weiter \]](#)

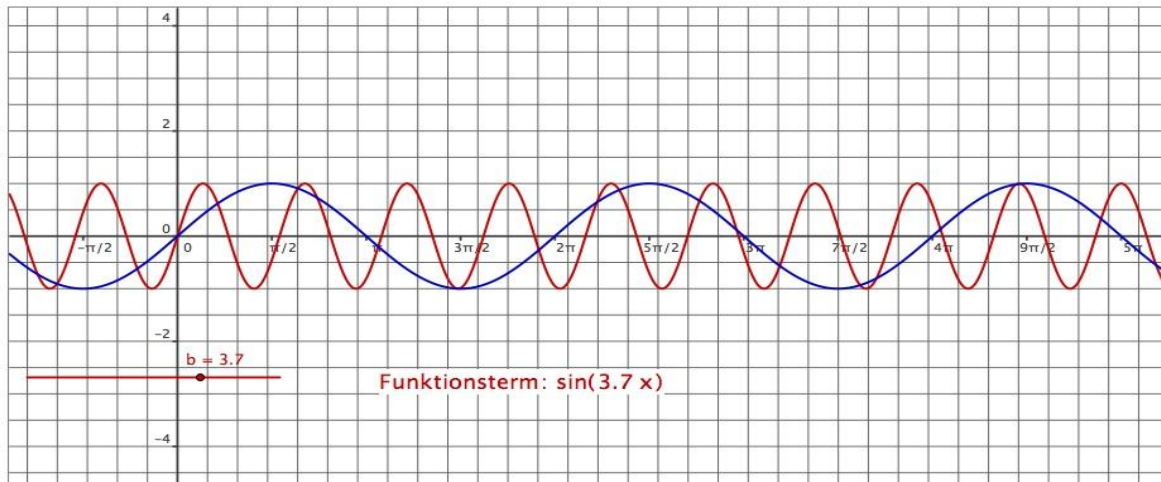
Abb 2: Allgemeine Sinusfunktion, Untersuchungen zur Amplitude

Oberhalb der Graphik erhalten die Schüler/innen Grundinformationen zu den Arbeitsaufträgen, die von ihnen bearbeitet werden sollen. Unterhalb des Koordinatensystems stehen die konkreten Arbeitsaufträge.

Um sich an die Thematik „heranzutasten“, soll die Schüler/innen zunächst den Schieberegler in einem vorgegebenen Wertebereich variieren (siehe Abb. 2). Ziel ist es, die Korrespondenz zwischen Funktionsterm und Graph zu entdecken und zu verstehen. Diese Herangehensweise findet auch bei den Untersuchungen zur Periode und zur Verschiebung in x -Richtung Verwendung (siehe Abb. 3 und 4). Auch hier sollen die Schüler/innen die Zusammenhänge jeweils spielerisch durch Variation des gerade thematisierten Parameters beobachten.

Eigenschaften der Trigonometrischen Funktionen $x \rightarrow \sin(bx)$

Mit diesem Arbeitsblatt werden die Eigenschaften von Funktionen der Form $x \rightarrow \sin(bx)$ untersucht. Die blaue Kurve zeigt den Graphen der bereits bekannten Sinusfunktion.



Zunächst soll für den Schieberegler b der Bereich $0 < b \leq 10$ betrachtet werden. Variiere den Schieberegler im angegebenen Bereich.

- 1) Was verändert sich am Graphen, was bleibt gleich?
- 2) Bestimme für die Funktionen $x \rightarrow \sin(2x)$, $x \rightarrow \sin(4x)$, $x \rightarrow \sin(7x)$, $x \rightarrow \sin(0,5x)$ und $x \rightarrow \sin(0,2x)$ die Periode. Gib nun allgemein die Periode für die Funktion $x \rightarrow \sin(bx)$ an.

Nun werden auch negative Werte für b betrachtet.

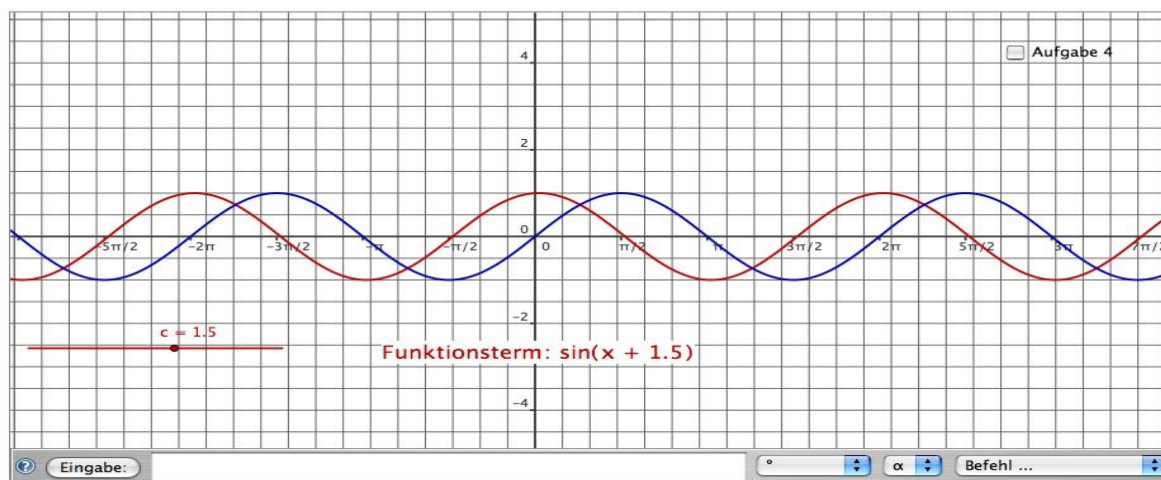
- 3) Ermittle für selbst gewählte Beispiele jeweils die Periode. Gib dann allgemein die Periode für die Funktion $x \rightarrow \sin(bx)$ an.

[Weiter]

Abb. 3: Allgemeine Sinusfunktion, Untersuchungen zur Periode

Eigenschaften der Trigonometrischen Funktionen $x \rightarrow \sin(x + c)$

Mit diesem Arbeitsblatt werden die Eigenschaften von Funktionen der Form $x \rightarrow \sin(x + c)$ untersucht. Die blaue Kurve zeigt den Graphen der bereits bekannten Sinusfunktion.



Variiere den Schieberegler im Bereich $-10 \leq c \leq 10$.

- 1) Was verändert sich am Graphen, was bleibt gleich?
- 2) Wie entsteht der Graph der Funktion $x \rightarrow \sin(x + 2)$ aus dem Graphen der Sinusfunktion?
- 3) Wie entsteht der Graph der Funktion $x \rightarrow \sin(x - 1,5)$ aus dem Graphen der Sinusfunktion?
- 4) Klicke das Kästchen "Aufgabe 4" an. Gib für den erscheinenden Funktionsgraphen den Term der zugehörigen Funktion an. Überprüfe deine Angabe, indem du den Term in die Eingabezeile eingibst. Achtung: Bei Dezimalzahlen Punkte und keine Kommata verwenden!

[Weiter]

Abb. 4: Allgemeine Sinusfunktion, Untersuchungen zur Verschiebung in x-Richtung

Erkennen der genauen Zusammenhänge für positive und negative Parameterwerte

Nach den qualitativen Beobachtungen (die Ergebnisse der Beobachtungen werden von den Schüler/innen im Heft schriftlich fixiert) wird für jeden der drei untersuchten Parameter durch weitere Aufgabenstellungen jeweils der genaue Zusammenhang zwischen Parameter im Funktionsterm und Aussehen des Graphen ermittelt. Dies geschieht immer zuerst für positive Parameterwerte und anschließend für negative. Auch bei diesen Aufgaben sollen die Schüler/innen stets ihre Erkenntnisse im Schulheft fixieren. Dies dient zum einen dazu, dass sie die entdeckten Zusammenhänge zu Hause selbst nochmals nachvollziehen können, zum anderen bilden diese Aufzeichnungen die Grundlage für eine gemeinsame Reflexion der Eigenschaften der Sinusfunktion $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c)$ in der Folgestunde.

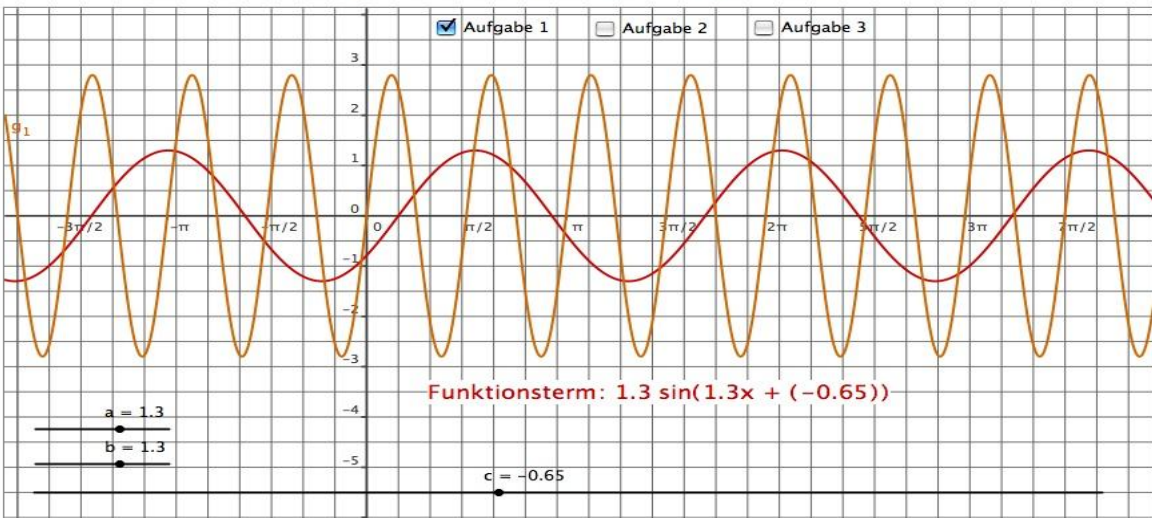
Vertiefung des Verständnisses durch interaktive Kombination der Parametervariation

Nachdem die Schüler/innen schrittweise mit den einzelnen Parameteränderungen vertraut wurden, wird in einem letzten Schritt das Verständnis für die einzelnen Parameter vertieft. Dazu werden drei verschiedene Aufgaben bearbeitet. Abb. 5 zeigt die erste dieser Aufgaben. Durch Klicken auf das Kästchen vor Aufgabe 2 erscheint selbige auf dem Bildschirm. Entsprechend gelangt man zur letzten Aufgabe. Die Schüler/innen sollen bei diesen Aufgaben nicht nur die Parameterwerte variieren, sondern konkret auch Amplitude, Periode und Verschiebung angeben. Hier zeigt sich dann das hoffentlich ☺ während der Bearbeitung der vorhergehenden Arbeitsblätter erlangte Verständnis.

Eigenschaften der Trigonometrischen Funktionen $x \rightarrow a \sin(bx+c)$ bzw. $a \sin(b(x + c/b))$

Hier siehst du in rot den Graph der Funktion $x \rightarrow \sin(x)$. Er kann durch die Schieberegler a , b und c verändert werden.

Aufgabe 1 Aufgabe 2 Aufgabe 3



Funktionsterm: $1.3 \sin(1.3x + (-0.65))$

- 1) Verändere die Schieberegler so, dass die rote und die orange Kurve zur Deckung kommen. Gib dann Amplitude und Periode der orangefarbenen Funktion an.
Klicke nun das Kästchen "Aufgabe 2" an.
- 2) Verändere die Schieberegler so, dass die rote und die grüne Kurve zur Deckung kommen. Gib dann Amplitud und Verschiebung der grünen Funktion an.
Klicke nun das Kästchen "Aufgabe 3" an.
- 3) Verändere die Schieberegler so, dass die rote und die blaue Kurve zur Deckung kommen. Gib dann Amplitude, Periode und Verschiebung der blauen Funktion an.

Abb. 5: Allgemeine Sinusfunktion, Vertiefung der Lerninhalte

Was hat sich dadurch verändert?

Die Selbständigkeit der Schüler/innen und das Übernehmen von Verantwortung für das eigene Arbeiten wird durch diese Vorgehensweise stark gefördert. Die dynamischen Prozesse erlauben es, vertieftes Verständnis für eine Thematik in kurzer Zeit zu erzeugen – für jeden Lernenden in seinem individuellen Tempo.

Die Schüler/innen erarbeiten sich selbständig die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c)$. Besonders wertvoll sind dabei folgende zwei Aspekte: Die Möglichkeit der dynamischen Änderung von Funktionsterm und zugehörigem Funktionsgraphen ermöglicht den Schüler/innen eine sehr anschauliche Entdeckung der vorhandenen Zusammenhänge. Daher können sich die Schüler/innen in sehr kurzer Zeit die Lerninhalte eigenständig erarbeiten. Dass dies für jeden Lernenden in dem selbst von ihm gewählten Tempo vonstatten gehen kann, ist ein weiterer positiver Aspekt. Viele Schüler/innen profitieren von dieser Vorgehensweise mehr als von entsprechenden Erarbeitungen im Gleichschritt.

In vielen anderen Bereichen kann man mit dynamischen Arbeitsblättern ebenso effizient und erfolgreich Lerninhalte erarbeiten lassen oder vermitteln.

Die [GeoGebra-Arbeitsblätter aus Abb. 2 bis 5 einschließlich der vorliegenden Datei](#) können Sie in gepackter Form [zip, 3,9 MB] auf Ihren Rechner laden.

Ein großer Pool an dynamischen Arbeitsblättern steht im Internet zur Verfügung:

<http://www.mathematik-digital.de>

<http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Unterrichtsmaterialien>

<http://wiki.zum.de/Mathematik-digital>

Verfasser: Michael Landeck, Gymnasium Fridericianum Erlangen,
Thomas Thiessen, Christian-Ernst-Gymnasium Erlangen