

Mathematik

Gymnasium

Jgst. 5 bis 10

Aus Fehlern lernen

Wer aus einem Fehler lernen will, muss seine Ursachen finden, um ihn in Zukunft vermeiden zu können. Dazu ist es notwendig, sich mit eigenen und fremden Fehlern auseinander zu setzen. Das Arbeiten mit Fehleraufgaben wird an mehreren Beispielen erläutert.

5a) Fehler: $\frac{2}{21} \cdot 2 = \frac{2^2}{21}$

Richtig: $\frac{4}{21}$

Was hätte ich wissen müssen?

Man muss: $\frac{2}{21} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{21}$ rechnen

Nicht: $\frac{2}{21} \cdot 2 = \frac{2^2}{21}$

Fehler der 1. Schulaufgabe vom 16.11.2007.

4. Aufgabe: Nullstelle der Funktion: $f(x) = 4,5 - (5 - 8x)$ mit $D_f = [0,5; 2]$

Falsch: nicht gefolgert, dass die Nullstelle nicht in der Definitionsmenge enthalten ist.

Im Lehrplan wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das Prinzip „Lernen aus Fehlern“ im Unterricht umgesetzt werden soll. Wer aus einem Fehler lernen will, muss seine Ursachen herausfinden, um ihn in Zukunft vermeiden zu können. Dazu ist es notwendig, sich mit eigenen (Fehleranalyse für Schulaufgaben) und fremden Fehlern (Arbeiten mit Fehleraufgaben) auseinanderzusetzen.

„Mathematische und naturwissenschaftliche Alltagsvorstellungen von Schülerinnen und Schülern, die sich durch eine gemeinsame Fehlerlogik auszeichnen, sind für eine produktive Nutzung im Unterricht besonders geeignet. Dies setzt jedoch voraus, dass Fehlermachen im Unterricht ohne Bewertung und Beschämung erlaubt ist und dass adäquate Handlungsroutinen verfügbar sind, mit Fehlern lernfördernd umzugehen.“

„Die Demotivation durch Fehler ist das zentrale pädagogische Problem für das Lernen aus Fehlern. Seine Lösung hat zwei entscheidende Voraussetzungen: Erstens muss die Kompetenz vermittelt werden, mit Fehlern produktiv umgehen zu können, d.h. Fehler finden und verbessern zu können. Zweitens muss im Unterricht neben die Negativbewertung von Fehlern ganz deutlich die Positivbewertung der Korrektur von Fehlern treten und dies von Schüler/innen auch so erfahren werden. Dies bleibt durchaus in der Reichweite der heutigen Möglichkeiten von Schule, wenn es auch sicher häufig den herrschenden Gewohnheiten

ten widerspricht.“ (Andreas Müller, Martina Nieswandt, Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel)

Arbeiten mit Fehleraufgaben

„Das Problem der Demotivation kann weiter dadurch entschärft werden, dass fremde Fehler als Lerngelegenheit herangezogen werden. Es ist sehr viel befriedigender, als Detektiv einen fremden Fehler aufspüren zu können, als sich mit den eigenen Misserfolgen beschäftigen zu müssen. Lernen aus fremden Fehlern spielt für das Lernen auch auf der Ebene des Verstehens eine große Rolle, indem typische Möglichkeiten von Fehlern und Fehlersuche erkannt werden und sowohl auf die Verbesserung wie die Vermeidung eigener Fehler übertragen werden.“ (Lutz Stäudel)

Eine konzentrierte Arbeit an einem fremden Fehler macht aber auch klar, dass man Fehler nicht einfach auf sich beruhen lassen darf.

„Fast alle Mathematikbücher enthalten nur fehlerfreie Lösungen. Dadurch vermitteln sie unabsichtlich die Botschaft: ‚Alle Lösungen sind immer vollständig richtig.‘ Die Schülerinnen und Schüler machen dagegen die Erfahrung, dass im ‚mathematischen Alltag‘ der Weg, der letztendlich zum richtigen Ergebnis führt, häufig mit Fehlern und Fehlversuchen gepflastert ist. So entsteht bei vielen der Eindruck, dass nur sie Schwierigkeiten hätten, die Aufgaben zu lösen und Mathematik zu verstehen. Daraus können richtige Minderwertigkeitsgefühle entstehen.“ (Attila Furdek)

„Auch Lernen aus Fehlern muss an Aufgaben geübt werden. Nur mit Übung lernt man, Fehler zu erkennen und zu verbessern, und nur mit Übung lernt man, Lehren aus früheren Fehlern – eigenen und fremden – zu ziehen.

Es ist im Wesentlichen Lernen per Analogieschluss, das hier vollzogen wird, indem typische Möglichkeiten von Fehlern erkannt werden und sowohl auf die Verbesserung wie die Vermeidung eigener Fehler übertragen werden.“ (Andreas Müller, Martina Nieswandt)

Außerdem ist es für die Schüler/innen, die sonst immer nur selbst richtig rechnen sollen, eine willkommene Abwechslung, Fehler aufzudecken und begründet richtig zu stellen. Grundsätzlich geht es dabei immer auch um die Kompetenzen Argumentieren und Kommunizieren.

Die folgenden Beispiele aus meinem Unterricht sollen aufzeigen, wie wirkungsvoll das Arbeiten mit Fehleraufgaben sein kann. Die Schülerlösungen haben meine anfänglichen Erwartungen deutlich übertroffen. Natürlich muss man den Schüler(inne)n mehr Zeit geben als bei „normalen“ Übungsaufgaben, aber die Erkenntnisse, die sich die Schüler/innen bei dieser Art von Aufgaben selbst erarbeiten, sind meines Erachtens viel nachhaltiger als eine Vielzahl von Übungsaufgaben zu dem jeweiligen Thema.

Beispiel 1: Fehleraufgabe mit Schülerlösungen

17 **Missverständnis:** Ein Mitschüler behauptet: „Bei Hyperbeln muss man immer die Null aus der Definitionsmenge ausschließen“
Erkläre, was er durcheinander gebracht hat.

Aus: Fokus Mathematik 8, S.129

S. 129/17

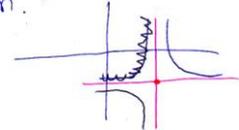
Der Nenner darf nicht null ergeben, da man nicht durch null nicht teilen darf. Aber es kann die Null trotzdem in der Definitionsmenge enthalten sein, da ~~der~~ der Nenner zuerst ausgerechnet werden muss.

z.B. $\frac{1}{2-x} \Rightarrow x=0 \Rightarrow \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$ 0 darf in der Definitionsmenge enthalten sein
 $\frac{1}{2-x} \Rightarrow x=2 \Rightarrow \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ geht nicht!

S. 129/17

Die Polstelle muss nicht immer bei Null sein, sondern kann auch bei z.B. 3 sein, also kann auch in der Definitionsmenge 0 sein.

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$



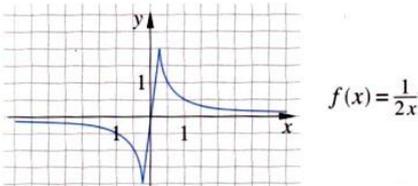
S.129/17

Sie darf in der Definitionsmenge sein, aber sie darf nicht alleine im Nenner stehen, da man durch Null nicht teilen

darf.
Bsp. $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Beispiel 2: Fehleraufgabe mit Schülerlösungen

7 Fehlerhaft



Die Aufgabe, den Graphen einer neuen Funktion zu zeichnen, erledigt ein Schüler wie in oben stehender Abbildung.

Was hat er richtig gemacht, wo ist ihm ein schwerwiegender Fehler unterlaufen?

Aus: Fokus Mathematik 8, Seite 127

S. 127/7

8e 13.03.08

Falsch: Die Hyperbeln sind miteinander verbunden. Die Polstelle ist 0, deshalb darf die Gerade nicht durch 0 gehen. Die Hyperbeln müssten weiterlaufen.

Richtig: Die Hyperbeln laufen durch den I und III Quadranten und sind richtig eingezeichnet.

eventuell Fehler: Er hat für $x=0$ eingesetzt und dabei vergessen, dass man das nicht darf. Und hat das Ergebnis 0 genommen, eingezeichnet und deswegen die Hyperbeln verbunden.

S. 127/7: Der Graph ist richtig gezeichnet, aber man darf die beiden ~~Graphen~~ nicht miteinander verbinden, denn die Null darf nicht im Nenner stehen. Er hat gedacht, dass $\frac{1}{0}$ null ergibt, es ergibt aber unendlich.

Beispiel 3: Fehleraufgabe mit Schülerlösungen

Gleichung

a) Die Gleichung $3x + 5 = 27$ wurde folgendermaßen gelöst:

$$3x + 5 = 27 \quad | :3$$

$$x + 5 = 9 \quad | -5$$

$$\underline{x = 4}$$

Untersuche die Lösungsschritte und entscheide, ob das Ergebnis richtig oder falsch ist. Korrigiere gegebenenfalls.

Aus: Bildungsstandards Mathematik: konkret, Cornelsen Scriptor, S.183

Nein die Lösung ist falsch, da bei der 1. Äquivalenzumformung vergessen wurde die 5 durch 3 zu teilen. Und bei der 2. Äquivalenzumformung ein Folgefehler gemacht wurde. Eigentlich hätte man $-7,6\bar{6}$ rechnen müssen. Oder man vertauscht die beiden Umformungen, dann hätte man keine Periode zum Rechnen.

Die Aufgabe ist falsch, da man zuerst die -5 abziehen muss und erst wenn nichts mehr geht $:3$ teilen. Man muss die Zahl mit dem Variablenanteil stehen lassen bis sie das einzige auf der einen Seite der Gleichung steht. Man muss soweit rechnen und von beiden Seiten addieren oder subtrahieren usw. so dass nur noch x da steht.

Fehleranalyse für Schulaufgaben

Mögliche Leitfragen zu einer Fehleranalyse nach Schulaufgaben:

1. Welche Fehler hast du gemacht? Schreibe die fehlerhafte Rechnung ab! Verbessere die Fehler mit einem Rotstift, so dass danach die richtige Umformung dasteht (Falsches wegstreichen, Richtiges ergänzen)!
2. Erkläre in Worten, wie es zu diesen Fehlern gekommen ist bzw. was du falsch gemacht hast.
3. Was hättest du wissen müssen, damit du diese Fehler zukünftig vermeidest? Falls du bestimmte Rechenregeln nicht beachtet hast, schreibe diese auf!
4. Formuliere dir Merksätze bzw. Tipps, die dir helfen diese Fehler zukünftig zu vermeiden!

So oder ähnlich könnten die Anweisungen an die Schüler/innen lauten, wenn sie sich mit ihren Fehlern in Schulaufgaben oder Hausaufgaben beschäftigen sollen. Da sich die Schüler/innen anfangs sehr schwer tun, ihren Fehlern nach diesem Muster auf den Grund zu

gehen, empfiehlt es sich, sie dabei möglichst gut zu unterstützen. Besonders geeignet dafür sind beispielsweise die Intensivierungsstunden.

Was hat sich dadurch verändert?

Das „Arbeiten mit Fehleraufgaben“ und die „Fehleranalyse für Schulaufgaben“ ist nach meiner Erfahrung für den Unterricht ein belebendes Element. In manchen Klassen ergab sich der Eindruck, dass es für die Schüler/innen eine ganz neues Erlebnis war, sich mit Fehlern – ob eigenen oder fremden – auseinanderzusetzen.

Ein bewussterer Umgang mit Fehlern lässt sich in vielen Unterrichtssituationen schulen. Beispielsweise durch die einfache Frage: „Welche Fehler habt ihr bei dieser Aufgabe gemacht?“. Viele Schüler/innen erklären bereitwillig ihre Fehler, zumindest dann, wenn man es geschafft hat, in seinem Unterricht diesbezüglich eine Vertrauensbasis zu schaffen. Dadurch erkennen andere Schüler/innen, dass sie nicht die einzigen sind, die einen bestimmten Fehler gemacht haben, und führen den Fehler nicht mehr unbedingt nur auf eigenes Unvermögen zurück, sondern erkennen vielleicht eine gewisse Systematik im Fehler, die sie dann im besten Falle zu hinterfragen beginnen. Sollte es sich um einen systematischen Fehler handeln, und das ist häufig der Fall, dann sollte natürlich diese Systematik im Unterrichtsgespräch deutlich gemacht werden.

Fazit

Eine Auseinandersetzung mit Fehlern über das „übliche“ Maß hinaus erfordert anfangs einen sehr hohen Zeitaufwand. Hat sich das „Arbeiten mit Fehlern“ aber erst einmal im Unterricht etabliert, dann ist es grundsätzlich ein sehr nachhaltiges Instrument zur Verbesserung der Schülerleistungen. Es wäre in diesem Zusammenhang wichtig, die Schüler/innen für das „Arbeiten mit Fehlern“ so früh wie möglich zu sensibilisieren, denn es hat sich gezeigt, dass sie in unteren Jahrgangsstufen noch wesentlich offener mit ihren Fehlern umgehen als in höheren Jahrgangsstufen, zumindest dann, wenn das „erste Eis“ beim „Arbeiten mit Fehlern“ gebrochen ist.

Zusammengestellt von Marc Landeck, Wolfgang-Borchert-Gymnasium Langenzenn

Bildnachweis: Die Aufgabenbeispiele entstammen den Büchern „Fokus Mathematik 8, Cornelsen Verlag“ und „Blum u. a.: Bildungsstandards Mathematik: konkret, Cornelsen Scriptor“; die Auszüge aus den Schülerarbeiten erstellte Marc Landeck