Mathematik **Realschule/Gymnasium** **Jgst. 5 bis 10**

Produktives Üben in der Mathematik

Produktive Übungsaufgaben ermöglichen Varianten, lassen Neues entdecken, verlangen Reflexionen und stellen Verknüpfungen zu früheren Aufgaben her. In diesem Kapitel werden Formen des produktiven Übens, wie z. B. Zahlenmauer und Rechendreieck, vorgestellt und durch Beispiele erläutert.

Was gibt es zu verbessern?

„Der Rechenunterricht kann nur zum Erfolg führen, wenn er in kleinen und kleinsten Schritten vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitet.“ (1955, Rechenlehrplan NRW, zit. nach Wittmann/Müller 1992[1]). Diese didaktische These gilt als überholt.

Vielmehr gilt: „Jede Mathematikstunde soll den Kindern Raum zu neuen Erfahrungen und Entdeckungen geben können. Aktiv entdeckendes Lernen kann und muss also nicht nur in so genannten ‚Einführungsstunden‘ stattfinden, sondern auch in ‚Übungsstunden‘“. (Wittmann/Müller, 1992)

Der Erfolg des Mathematikunterrichts hängt nicht so sehr von der Anzahl der Übungen, sondern überwiegend von der Art des Übens ab. Es ist durchaus möglich, konventionelle Übungsaufgaben aus dem Schulbuch in produktive Übungsaufgaben umzuwandeln. Aber wie wird aus einer Schulbuchaufgabe eine Aufgabe, an der man produktiv üben kann? Welche Möglichkeiten haben wir, um produktive Aufgaben zu finden? Das wollen wir an Beispielen in unserem Artikel zeigen.

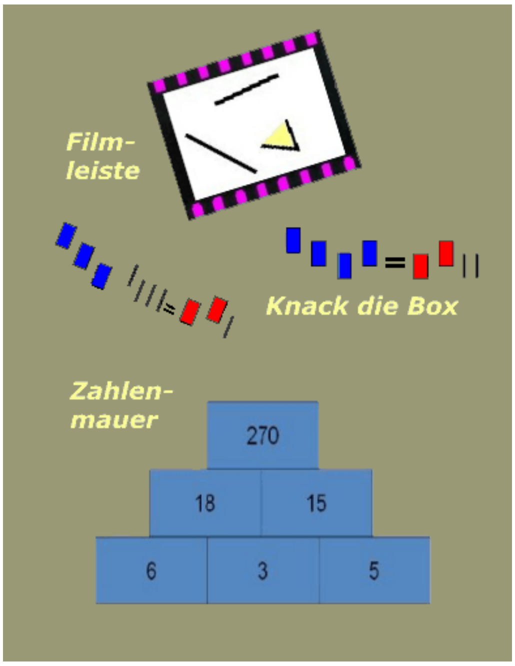


Abb. 1: Kreative Seiten der Mathematik

Was ist „produktiv“ am Üben?

Üben ist produktiv, wenn die Schüler/innen dabei neue Kenntnisse erwerben. Schon während der Phase des Entdeckens wird geübt, es kommen beständig Kenntnisse und Fertigkeiten aus dem Grundwissen zum Einsatz. Es gilt das Motto „Entdecken beim Üben - üben beim Entdecken.“

Produktives Üben ist nicht nur ein Training von kleinen Fertigkeiten, sondern ist stets ein Lernen in Sinnzusammenhängen und thematischen Kontexten. Für Schüler/innen ist es wichtig die Bedeutung ihres Tuns zu erkennen, da sie dann auch eine größere Motivation zum Üben haben.

[1] Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. (Klett) Stuttgart 1992

Beim produktiven Üben hat man die Möglichkeit, Aufgaben unterschiedlichen Niveaus zu stellen und auf Schüler/innen individuell einzugehen. Produktives Üben bedeutet auch, nicht nur schematisch zu üben, sondern es soll dabei bewusst und reflektierend gelernt werden. Die Lernenden sollen dabei ihre Übungsaktivitäten selbst steuern können, aber auch einen Zuwachs von Fähigkeiten beim Üben erfahren.

Welche Ziele verfolgen wir mit dem „produktiven Üben"?

- **Automatisierung von Fertigkeiten, Verinnerlichung von Kenntnissen**
  Dieses ist sicher ein wichtiges Übungsziel, damit Fertigkeiten ohne besondere Anstrengung abrufbar sind. Die Schüler/innen werden kognitiv entlastet, um ihnen einen Freiraum für das Lösen anspruchsvoller Probleme zu geben.
- **Erweitern von Verstehen**
  Beim Automatisieren geht den Lernenden häufig der Sinn ihres Tuns verloren. „Wozu brauchen wir das im Leben?" ist eine häufig gestellte Frage. Hier ist es wichtig, Aufgaben zu stellen, mit denen sie sich auch wirklich identifizieren können, Aufgaben, die aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler entnommen sind oder auch innermathematisch interessant sind. Dies erhöht die Motivation, sich mit einer Aufgabe überhaupt zu beschäftigen.
- **Transfer fördern**
  Die Verinnerlichung einer Fertigkeit garantiert noch nicht ihre Anwendbarkeit. Man muss die Aufgaben so gestalten, dass sie übertragbar und anwendbar sind. Außerdem ist es wichtig, den Schülerinnen und Schülern Fähigkeiten und Fertigkeiten anzutrainieren, damit sie Probleme in variablen Situationen erfolgreich und verantwortlich nutzen können. (Problemlösestrategien)
- **Bereitschaften und Haltungen bilden**
  Produktives Üben soll die Sicherheit und das Selbstbewusstsein stärken. Die Schülerinnen und Schüler sollen mit offenen Aufgabensituationen, wie sie in PISA-Tests oder in den Vergleichsarbeiten gefordert werden, besser umgehen können und dadurch ihre Kreativität stärken.

Einteilung in verschiedene Übungsformen

Aufgaben mit bekannten Strukturen (M1)

Übungen, bei denen Reflexion im Vordergrund steht (M2)

Übungen, die variantenreich sind und Entdeckungen ermöglichen (M3)

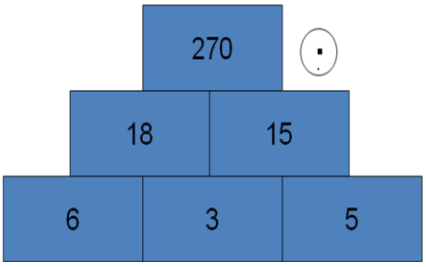
Aufgaben, die das Vernetzen oder unterschiedliche Darstellungsformen fördern (M4)

Zusammengestellt von Gaby Frohberg-Hintzen, Realschule Neubiberg, Doris Wurst, Walter-Klingenbeck-Realschule Taufkirchen und Rolf Herold, Georg-Hartmann-Realschule Forchheim

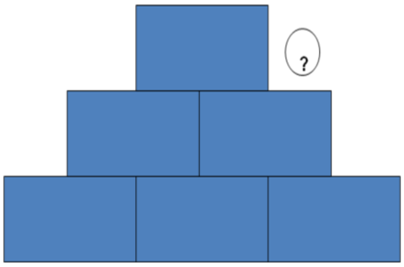
Anlagen: M1 bis M5

Strukturierte Aufgaben / Übungsformate

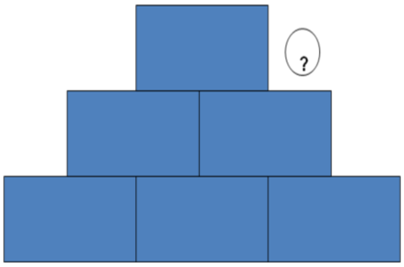
Beispiel 1: Zahlenmauern



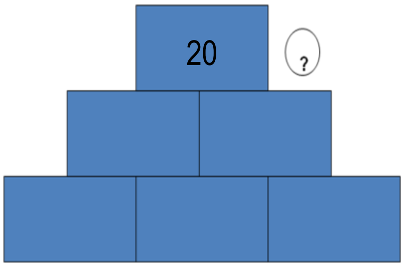
Beispielaufgabe



offene Situation:
Was kann man mit einer Zahlenmauer tun?



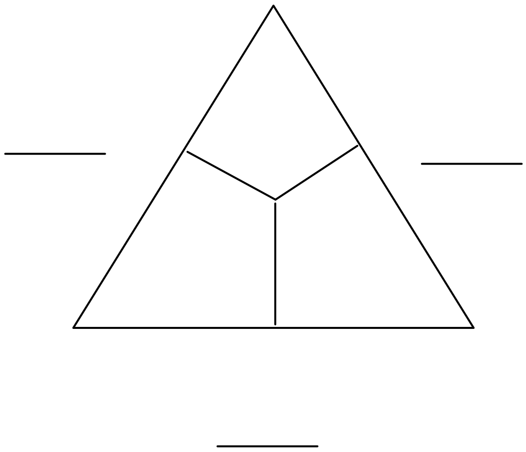
Problemaufgabe: Verwende möglichst viele Primzahlen.



Problemumkehr: Was lässt sich mit einer 20-iger Mauer alles machen?

Gaby Frohberg-Hintzen, Realschule Neubiberg, Doris Wurst, Walter-Klingenbeck-Realschule Taufkirchen, Rolf Herold, Georg-Hartmann-Realschule Forchheim (SINUS Bayern)

Beispiel 2: Rechendreiecke als Übungsaufgaben mit integrierter Selbstkontrolle
(nach Franz Anneser, Realschule Dingolfing, SINUS Bayern)



Addition ganzer Zahlen

Schritte, die zu Gleichungen führen:

1.Schritt:

Erstelle ein eigenes Rechendreieck, in dem auch negative Zahlen vorkommen sollen (Eintragen ganzer Zahlen in die Felder des Dreiecks, Eintragen der Summe der benachbarten Zahlen im Dreieck auf den äußeren Linien).

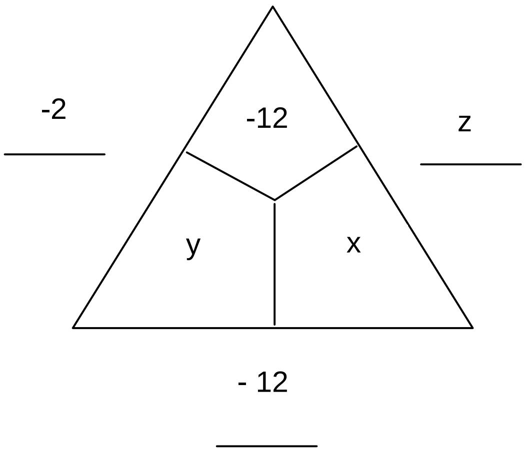
Lösche zwei innere Zahlen und eine äußere.

Versuche, die gelöschten Zahlen zu berechnen.

2. Schritt:

Setze für die gelöschten Zahlen x, y und z.
Formuliere Gleichungen mit x, y und z.

Löse die Gleichungen.



$y - 12 = -2$
$y = +10$

$y + x = -12$
$x = -22$

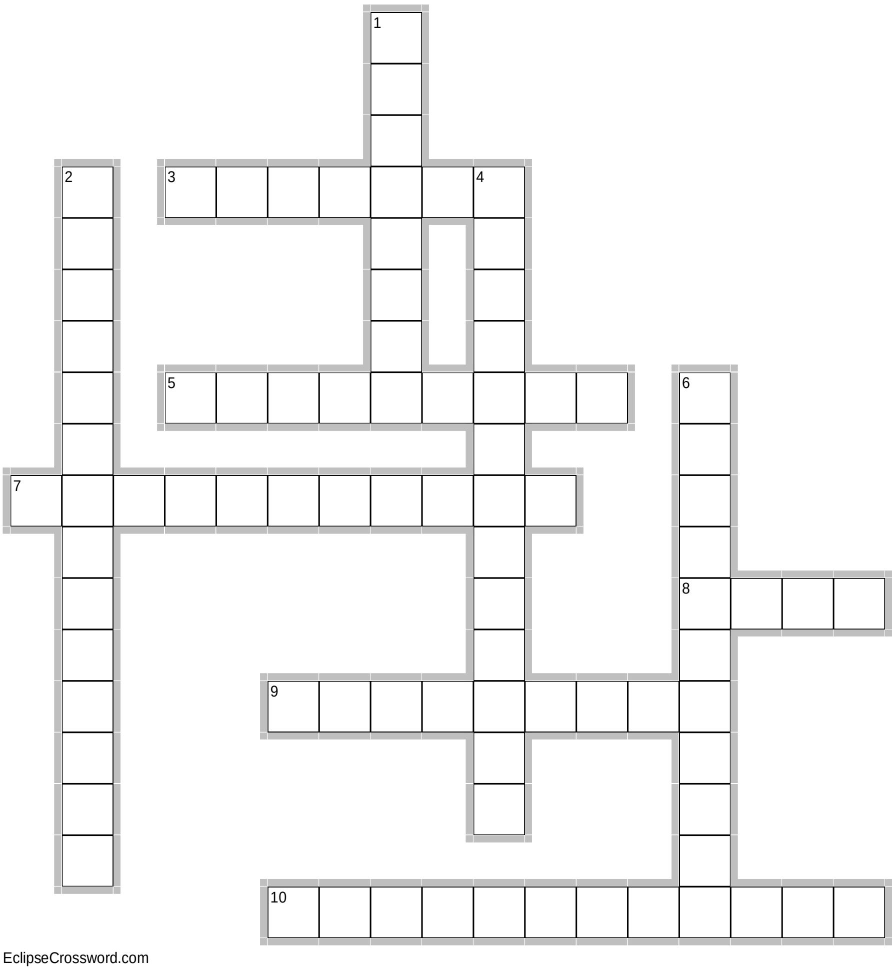
$-12 + x = z$
$z = -34$

Gaby Frohberg-Hintzen, Realschule Neubiberg, Doris Wurst, Walter-Klingenbeck-Realschule Taufkirchen, Rolf Herold, Georg-Hartmann-Realschule Forchheim (SINUS Bayern)

Beispiel 3: Kreuzworträtsel zum Lernen von Regeln

Die fettgedruckten Zahlen stehen für Worte im Kreuzworträtsel

Ein Winkel wird von zwei **6** gebildet, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Dieser Punkt heißt **4** des Winkels. Die Halbgeraden heißen **1** des Winkels. Das Maß eines **3** wird in der Einheit **8** angegeben.
An zwei sich **10** Geraden gilt: **9** liegende Winkel heißen **2**; sie sind **5**. Nebeneinander liegende Winkel heißen **7;** sie ergänzen sich zu 180°.



Hinweis: Das Kreuzworträtsel wurde mit dem freien Programm EclipseCrossword (www.eclipsecrossword.com) erstellt.

Gaby Frohberg-Hintzen, Realschule Neubiberg, Doris Wurst, Walter-Klingenbeck-Realschule Taufkirchen, Rolf Herold, Georg-Hartmann-Realschule Forchheim (SINUS Bayern)

Reflektierendes Üben

Beim Einüben von Fertigkeiten soll, wann immer es möglich ist, auch zur Reflexion des verwendeten Verfahrens angeregt werden. Das kann man dadurch erreichen, dass man reflexionsanregende Fragen hinzufügt:

Beispiel 1: Schreibe ohne Komma

a) 3,75 kg; 0,027 kg; 7,48 kg; 0,67 kg; 34,317 kg

b) 2,84 t; 71,5 t; 0,384 t; 0,002 t; 0,003564 t

Welche Aufgaben kannst du in einem Schritt lösen? Für welche Aufgaben benötigst du mehrere Schritte? Schreibe auf, woran du das schon vorher erkennen kannst.

Fragen wie diese sollen eine erhöhte Aufmerksamkeit der Schüler/innen auf wesentliche Aspekte des Lösungsverfahrens lenken. Schüler/innen können hier selbst entscheiden; das Üben mit diesen Aufgaben ist stärker selbst gesteuert. Auch auf das Vernetzen verschiedener Unterrichtsmethoden soll hingewiesen werden, wie zum Beispiel bei der letzten Aufforderung, bei der eine wichtige Kompetenz verlangt wird, das Verbalisieren.

Weitere Fragen, die zu Reflexion anregen:

- Begründe (mit eigenen Worten);
- Vergleiche mit …
- Zeichne ein anschauliches Bild.
- Erkläre es deinem Nachbarn
- Stelle … einmal anders dar (z. B. als Formel, als Term, als Graph, als Tabelle, …)
- Gib ein eigenes Beispiel, bei dem man nicht so vorgehen kann.

Beispiel 2: Einbauen von Störaufgaben, d. h. Aufgaben stellen, die sich nicht in die Reihe einfügen und die Schüler(innen) dazu anregen, nachzudenken.

Berechne:
a) 35 kg + 500 g b) 1,5 m + 200 dm +25 mm c) 3 m³ +2 dm³ d) 2000 m + 2,5 m²

Gaby Frohberg-Hintzen, Realschule Neubiberg, Doris Wurst, Walter-Klingenbeck-Realschule Taufkirchen, Rolf Herold, Georg-Hartmann-Realschule Forchheim (SINUS Bayern)

M3 (1)

Entdeckendes Lernen

Beispiel 1: Eine Aufgabe, „wie sie im Schulbuche steht“

Familie Bachschmid will sich einen neuen DVD-Player kaufen.
Drei Angebote sind zu vergleichen, um das Günstigste herauszufinden:

Angebot I: Der Händler verlangt 619 € und gibt 3 % Skonto.

Angebot II: Der Händler verlangt 692 €; er gewährt 15 % Rabatt.

Angebot III: Im Verbrauchermarkt „Maxi“ wird das Gerät mit 520 € + MWSt angeboten.

a) Welches Angebot ist am günstigsten?

b) Wie groß ist jeweils die Ersparnis gegenüber dem teuersten Angebot?

c) Vergleiche mit dem Angebot IV: Der 30 km entfernte Großmarkt „Giga“ hat das Gerät mit 589 € ausgezeichnet. Um ihn zu erreichen, müssen Zeit und Benzin aufgewendet werden.

Unserer Erfahrung nach sind Schüler/innen mehr bei der Sache, wenn sie die Ergebnisse selbst durchgeführter Umfragen in Prozente umrechnen dürfen. Als Themen kommen hier beispielsweise das Einkaufsverhalten der Mitschüler/innen am Pausenstand, die Zeit, die jeweils für Hausaufgaben aufgewendet wird, oder die Vorliebe der Mitschüler für bestimmte Musikinterpreten in Frage.

Zusätzliche Aufgabe:

Entwirf einen Fragebogen, mit dem du deine Mitschülerinnen und Mitschüler über die Zeit befragst, die sie für ihre Hausaufgaben benötigen. Stelle außerdem die Frage, ob sie Musik hören, während sie die Hausaufgaben anfertigen.

Werte die erhaltenen Fragebögen aus, indem du berechnest, wie viel Prozent deiner Mitschülerinnen und Mitschüler für die Hausaufgaben zwischen 0 und 20 Minuten, zwischen 20 und 40 Minuten, zwischen 40 und 60 Minuten, usw. benötigen. Gib außerdem an, wie viel Prozent von ihnen dabei Musik hören und wie viel nicht.

Wie müsstest du den Fragebogen ergänzen, wenn Du auch noch wissen möchtest, ob sich Buben und Mädchen in ihrem Verhalten unterscheiden?

Beispiel 2: Teiler (5. Jgst)

Herkömmlich:

Ermittle alle Teiler der Zahl und gib die Anzahl der Teiler an:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 17 e) 23 f) 36 g) 48 h) 100

Ziel: Üben, ohne das Nachdenken auszuschalten:

Hier die Aufgabenstellung, die zum Entdecken anregt:

Suche die folgenden Zahlen. Kannst du Vermutungen über die Zahlen aufstellen?

- Vier Zahlen unter 100, die genau zwei verschiedene Teiler haben
- Vier Zahlen unter 100, die genau drei verschiedene Teiler haben
- Eine Zahl unter 100 mit möglichst vielen Teilern

Beispiel 3: Gefährlicher Überholvorgang

Ein Motorradfahrer möchte auf einer Bundesstraße einen vor ihm fahrenden Lkw mit Anhänger überholen, der eine Gesamtlänge von 20 Meter hat und mit einer konstanten Geschwindigkeit von 72 km/h (20 m/s) fährt. Der Motorradfahrer schert zum Überholen 40 m hinter dem Lastzug auf die Gegenfahrbahn aus und kehrt 40 m vor dem überholten Fahrzeug wieder auf seine Fahrbahn zurück. Dabei fährt er während des gesamten Überholvorgangs mit einer konstanten Geschwindigkeit von 108 km/h (30 m/s).

Welche Zeit benötigt das Motorrad insgesamt auf der Gegenfahrbahn?

Welche Strecke legt das Motorrad insgesamt auf der Gegenfahrbahn zurück?
In 500 m Entfernung (gemessen vom Ort des Ausscherens auf die Gegenfahrbahn) kommt dem Motorrad ein Pkw mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h (25 m/s) entgegen. Ist der Überholvorgang noch möglich?
Löse die Aufgaben zunächst grafisch und überprüfe deine Lösung durch eine Rechnung.

Variationen:

Änderung der Geschwindigkeiten, Änderungen des Abstandes.

Mit welcher Geschwindigkeit müsste der Motorradfahrer fahren, um den Lkw innerhalb von 8 Sekunden zu überholen? Welche Strecke legt dabei das Motorrad zurück?

Mit welcher Geschwindigkeit müsste der Lkw fahren, wenn der Überholvorgang in 8 Sekunden beendet sein sollte? Welche Strecke legt dabei der Lkw zurück?

Wie weit müsste der Pkw entfernt sein, um einen Zusammenstoß zu vermeiden?

Wie schnell müsste das Motorrad fahren, um einen Zusammenstoß zu vermeiden.

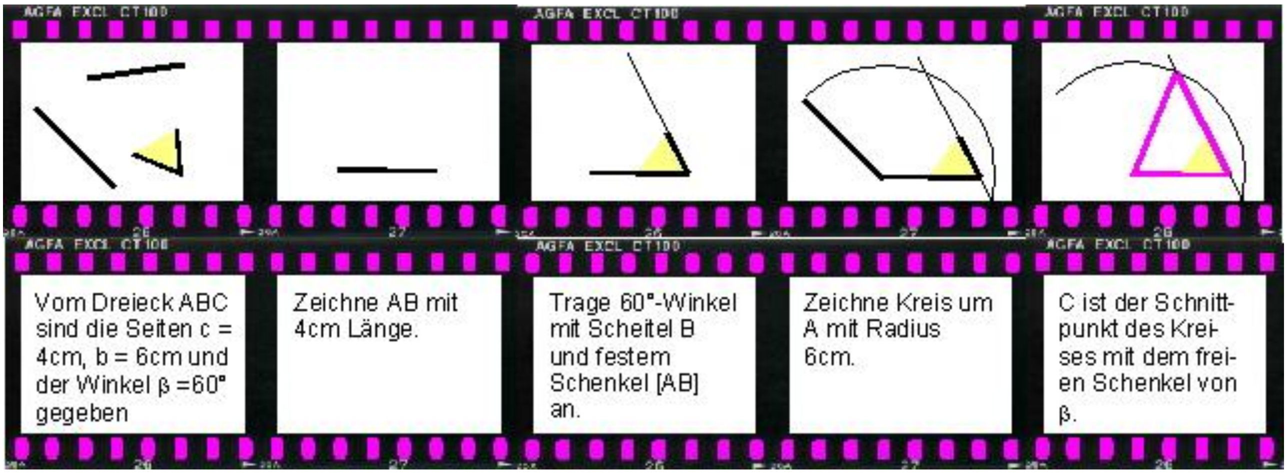
Ein Pkw und ein Motorrad treffen sich auf einer Landstraße nach 6 Minuten. Der Pkw fährt mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h, das Motorrad mit 120 km/h. Welche Entfernung haben ihre 2 Startorte?

Aufgaben, die das Vernetzen fördern

Dies können Aufgaben sein, die innerhalb eines Themengebietes vernetzt werden oder die sich inhaltlich über mehrere Themenbereiche erstrecken. Dabei soll die Transferfähigkeit von Schülerinnen und Schülern gefördert werden.

Beispiel 1: Filmleisten

(Idee: Rolf Herold: RS Forchheim auf der Grundlage eines „Methodenwerkzeugs“ aus dem Methodenhandbuch deutschsprachiger Fachunterricht[2])



Bei der so genannten Filmleiste kann man innerhalb eines Themenbereiches vernetzen. Man übt verbalisieren, zusammensetzen und das Zeichnen von verschiedenen Dreiecken.

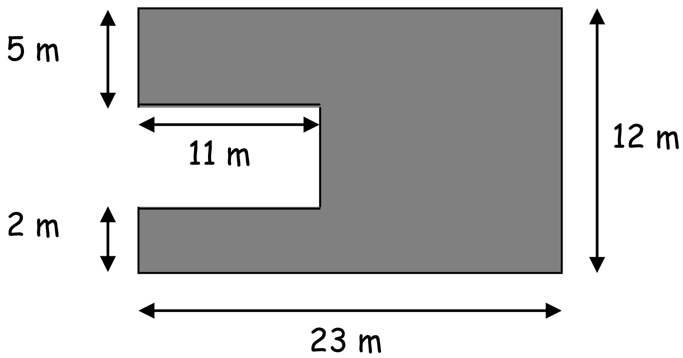
Beispiel 2: Fermiaufgaben

Bei diesen Aufgaben werden Basiswissen, Alltagswissen und verschiedene Strategien miteinander vermischt. Es gibt viele geeignete Fermiaufgaben, mit denen man Schülerinnen und Schüler gerade auch in Vertretungsstunden begeistern kann.

z. B. Wie viele Menschen können auf einem Fußballfeld nebeneinander stehen?
Wie viele Fußbälle passen in ein Fußballstadion?
Wie lang wachsen die Haare in einer Klasse in einer Schulstunde?
Wie viele Blätter hat ein Baum?

Beispiel 3: Flächenberechnung

Gegeben ist folgende Figur:



[2] Leisen, Josef: Methodenhandbuch Deutschsprachiger Fachunterricht (DFU). (Varus) Bonn [2]2003

a) Beschreibe die gefärbte Fläche durch einen Text.

b) Berechne den Inhalt der gefärbten Fläche.

c) Erstelle drei weitere Figuren, die den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Beispiel 4: Geometrische Formen[3]

Die Aufgabe lässt sich in verschiedenen Jahrgangsstufen und Unterrichtszusammenhängen nutzen wie z. B. Symmetrie, Dreiecke, Vierecke, Umfang, Flächeninhalt, Prozentrechnung, zentrische Streckung.

Holzdecke

Hier siehst du das Muster der Holzverkleidung der Decke eines Tagungsraums.

Stelle möglichst viele Eigenschaften dieser Figur zusammen.

Überlege dir interessante Fragen zu dem Muster und lasse sie von deinem Nachbarn beantworten.

Beispiel 5: Verschiedene Darstellungsformen

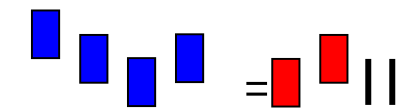
„Knack die Box"[4] © schulverlag plus AG, Bern, und Klett und Balmer AG, Zug, 2002

Hier werden Gleichungen in 4 verschiedenen Darstellungsformen geübt:
das Verbalisieren, die Tabelle, die Gleichung oder mit Hilfe der Streichholzschachtel das visuelle Darstellen von Gleichungen.
Dies geschieht entweder durch das Entfernen einzelner Kästchen (die Schüler/innen sollen dann die Lücken füllen) oder indem man ein Quartettspiel vorbereitet, in dem die Schüler/innen die vier zusammenpassenden Teile finden müssen.

Vordrucke für ein Knack-die-Box-Quartett siehe M5

[3] Vgl. Ulm, Volker: Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. (Kallmeyer) Seelze-Velber [2]2005, S. 30, vgl. auch: Wurz, Lothar: Unterrichtspraktische Überlegungen zu einer geometrischen Figur, Mathematik in der Schule 36, 1998

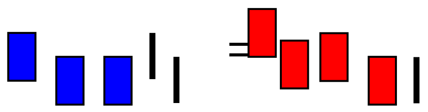
[4] Nach: Mathbu.ch 7: Lernumgebungen 7, schulverlag plus, Bern und Klett und Balmer, Zug



$4x = 2y + 2$

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11

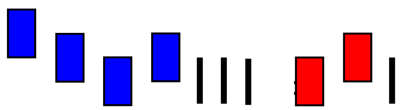
In vier blauen Boxen liegen insgesamt zwei Hölzchen weniger als in zwei roten Boxen.



$3x + 3 = 4y + 1$

x	2	6	10	14	18	22
y	2	5	8	11	14	17

In vier roten Boxen liegen insgesamt zwei Hölzchen mehr als In drei blauen Boxen.



$4x + 3 = 2y + 1$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

In einer blauen Box liegen zwei Hölzchen weniger als in einer roten.

$3x = y + 2$

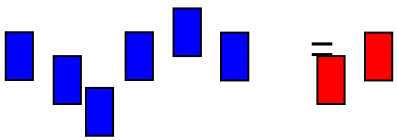
x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	7	10	13	16

In einer roten Box sind zwei Hölzchen weniger als in drei blauen Boxen.

$2x + 7 = 3y$

x	1	4	7	10	13	16
y	3	5	7	9	11	13

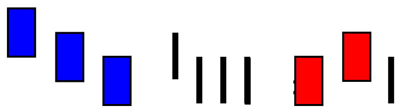
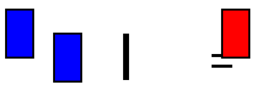
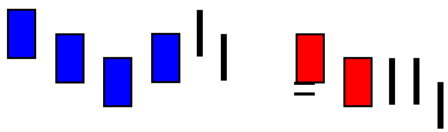
In drei roten Boxen sind sieben Hölzchen mehr als in zwei blauen Boxen

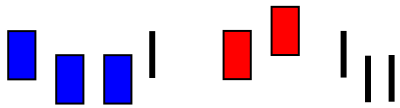


$2y = 6x$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

In zwei roten Boxen liegen doppelt so viele Hölzchen wie in drei blauen Boxen.

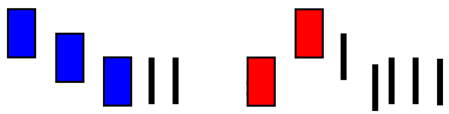
<table>
<tr>
<td></td>
<td>**3 x + 4 = 2y + 1**</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr>
<tr><td>y</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td></tr>
</table>
</td>
<td>Zwei rote Boxen und ein Hölzchen sind genau so viel wie drei blaue Boxen und vier Hölzchen.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>**2x + 1 = y**</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>y</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td></tr>
</table>
</td>
<td>In einer roten Box ist ein Hölzchen mehr als in einer blauen Box.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>**4 x + 2 = 2y + 3**</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1,5</td><td>3,5</td><td>5,5</td><td>7,5</td><td>9,5</td><td>11,5</td></tr>
</table>
</td>
<td>Zwei rote Boxen und drei Hölzchen ergeben genau so viel wie vier blaue Boxen und zwei Hölzchen</td>
</tr>
</table>



$$3x + 1 = 2y + 3$$

x	2	4	6	8	10	12
y	2	5	8	11	14	17

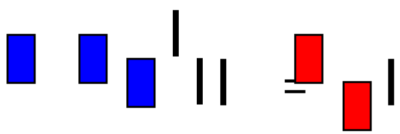
In drei blauen Boxen befinden sich zwei Hölzchen mehr als in zwei roten Boxen



$$3\ x + 2 = 2y + 5$$

x	1	3	5	7	9	11
y	0	3	6	9	12	15

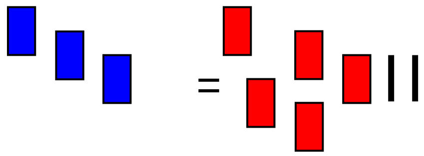
Drei blaue Boxen und zwei Hölzchen ergeben genau so viel wie zwei rote Boxen und 5 Hölzchen.



$$3x + 3 = 2y + 1$$

x	2	4	6	8	10	12
y	4	7	10	13	16	19

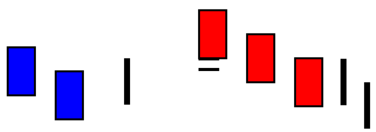
Drei blaue Boxen enthalten zwei Hölzchen weniger als zwei rote Boxen.



$3x = 5y + 2$

x	4	9	14	19	24	29
y	2	5	8	11	14	17

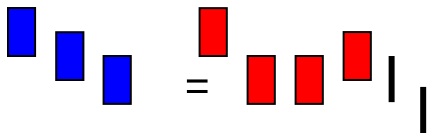
In drei blauen Boxen liegen zwei Hölzchen mehr als in fünf roten Boxen



$2x + 1 = 3y + 2$

x	5	8	11	14	17	20
y	3	5	7	9	11	13

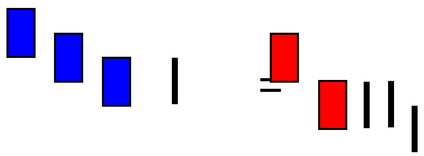
In drei roten Boxen liegt ein Hölzchen weniger als in zwei blauen Boxen



$3x = 4y + 2$

x	2	6	10	14	18	22
y	1	4	7	10	13	16

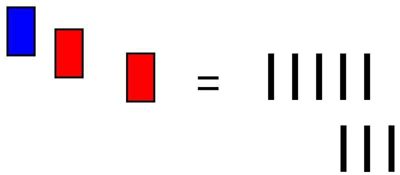
In drei blauen Boxen liegen zwei Hölzchen mehr als in vier roten Boxen



$$3x + 1 = 2y + 3$$

x	2	4	6	8	10	12
y	2	5	8	11	14	17

In drei blauen Boxen liegen zwei Hölzchen mehr als in zwei roten Boxen



$$x + 2y = 8$$

x	2	4	6	8	10	12
y	3	2	1	0	---	---

In einer blauen und zwei roten Boxen liegen insgesamt acht Hölzchen